Física para la ciencia y la tecnología, volumen 2
Autores: Paul A. Tipler y Gene Mosca
Editorial Reverté, Barcelona, 2010, págs. 693-762
ISBN: 978-84-291-4430-7

Esta obra está protegida por el derecho de autor y su reproducción y comunicación pública, en la modalidad puesta a disposición, se ha realizado en virtud del artículo 32.4 de la Ley de Propiedad Intelectual. Queda prohibida su posterior reproducción, distribución, transformación y comunicación pública en cualquier medio y de cualquier forma.

SEXTA EDICIÓN

FÍSICA PARA LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

VOLUMEN 2
Electricidad y magnetismo/Luz

Paul A. Tipler
Gene Mosca

EDITORIAL REVERTÉ

Barcelona • Bogotá • Buenos Aires • Caracas • México

Registro bibliográfico (ISBD)

Tipler, Paul A.

[Physics for scientists and engineers. Español]

Física para la ciencia y la tecnología. Electricidad y magnetismo, luz / Paul A. Tipler, Gene Mosca ; coordinador y traductor: José Casas-Vázquez; traductores: Albert Bramon Planas… [et al.]. – Barcelona : Reverté, 2010.

XXII , P. 693-1172 , [29] p. : il. col. ; 27 cm.

Índice.

DL BI-886-2011. – ISBN 978-84-291-4430-7

1. Física. I. Mosca. Gene, coaut. II. Casas-Vázquez, José, coord., trad. III. Bramon Planas, Albert, trad. IV. Título.

53

Título de la obra original:

Physics for Scientists and Engineers, Sixth Edition.

Edición original en lengua inglesa publicada por

W. H. FREEMAN AND COMPANY, New York and Basingstoke
41 Madison Avenue, New York (NY) – U.S.A.

Copyright © 2008 by W. H. Freeman and Company. All Rights Reserved

Edición en español:

© Editorial Reverté, S. A., 2010, 2011, 2012

ISBN: 978-84-291-4430-7 Volumen 2
ISBN: 978-84-291-4428-4 Obra completa

Reimpresión: julio de 2012

Versión española:

COORDINADOR Y TRADUCTOR

Dr. José Casas-Vázquez
Catedrático de Física de la Materia Condensada

TRADUCTORES

Dr. Albert Bramon Planas
Catedrático de Física Teórica

Dr. Josep Enric Llebot Rabagliati
Catedrático de Física de la Materia Condensada

Dr. Fernando M. López Aguilar
Catedrático de Física Aplicada

Dr. Vicenç Méndez López
Profesor Agregado de Física de la Materia Condensada

Departamento de Física
Universidad Autónoma de Barcelona
España

MAQUETACIÓN: REVERTÉ-AGUILAR
CORRECCIÓN DE ESTILO: CARLOS CISTUÉ SOLÁ

Propiedad de:

EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15. Local B
Tel: (34) 93 419 33 36
Fax: (34) 93 419 51 89
08029 Barcelona. ESPAÑA
reverte@reverte.com

www.reverte.com

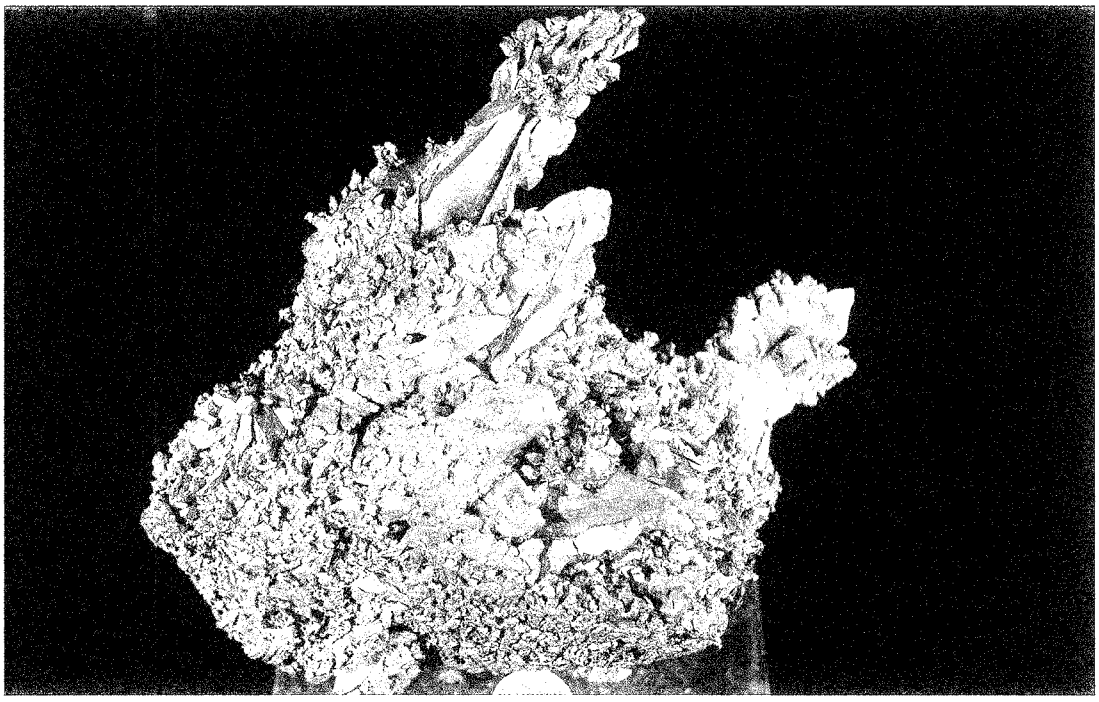
Reservados todos los derechos. La reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos, queda rigurosamente prohibida sin la autorización escrita de los titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas por las leyes.

Impreso en España - *Printed in Spain*

Depósito Legal: BI-886-2011
Impreso por Grafo, S.A.
Basauri – España

1342

PARTE IV ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO



CAPÍTULO 21

EL COBRE ES UN CONDUCTOR CUYAS PROPIEDADES SON ÚTILES PORQUE HACEN POSIBLE EL TRANSPORTE DE LA ELECTRICIDAD. *(Brooks R. Dillard/www.yuprocks.com)*

Campo eléctrico I: distribuciones discretas de carga

21.1 Carga eléctrica
21.2 Conductores y aislantes
21.3 Ley de Coulomb
21.4 El campo eléctrico
21.5 Líneas de campo eléctrico
21.6 Acción del campo eléctrico sobre las cargas

? ¿Cuál es la carga total de los electrones de una moneda? (Véase el ejemplo 21.1.)

Hoy en día, nuestra vida diaria depende extraordinariamente de la electricidad, mientras que hace un siglo sólo disponíamos de alguna lámpara eléctrica. Sin embargo, aunque el uso generalizado de la electricidad es muy reciente, su estudio tiene una larga historia que comienza mucho antes de que apareciese la primera lámpara eléctrica. Las primeras observaciones de la atracción eléctrica fueron realizadas por los antiguos griegos. Éstos observaron que al frotar el ámbar, éste atraía pequeños objetos como pajitas o plumas. Ciertamente, la palabra "eléctrico" procede del vocablo griego asignado al ámbar, *elektrón*.

Actualmente, la electricidad está en un proceso continuo de estudio, de investigación y de búsqueda de nuevos usos. Los ingenieros eléctricos mejoran la tecnología existente en materia eléctrica, incrementando el rendimiento y eficacia de diferentes dispositivos eléctricos, tales como automóviles híbridos, plantas de producción eléctrica, etc. Pinturas de fijación electrostática se utilizan en la industria de la automoción, en diversas partes del motor y de la estructura general del automóvil. Los procesos electrostáticos de cromación y de fijación de la pintura permiten realizar recubrimientos más duraderos, y de forma más ecológica y cuidadosa del medio ambiente que los que utilizan pinturas líquidas, dado que no utilizan ningún tipo de disolvente.

En este capítulo, se inicia el estudio de la electricidad con la electrostática, que trata de las cargas eléctricas en reposo. Después de introducir el concepto de carga eléctrica, analizaremos brevemente el concepto de conductores y aislantes y la forma en que un conductor puede adquirir una carga. A continuación, estudiaremos la ley de Coulomb, que describe la fuerza ejercida por una carga eléctrica sobre otra. Posteriormente, introduciremos el concepto de campo eléctrico y veremos cómo puede describirse mediante las líneas de campo, las cuales indican el módulo y la dirección del campo, del mismo modo en que describíamos el campo de velocidades de un fluido en movimiento mediante líneas de corriente (capítulo 13). Por último, abordaremos el comportamiento de las cargas puntuales y los dipolos en campos eléctricos.

Un gato y un globo hinchado. *(Roger Ressmeyer/CORBIS.)*

21.1 CARGA ELÉCTRICA

Consideremos una barra de caucho que se frota con un trozo de piel y se suspende de una cuerda que puede girar libremente. Si aproximamos a esta barra una segunda barra de caucho, frotada también con una piel, observaremos que las barras se repelen entre sí (figura 21.1*a*). El mismo resultado se obtiene si repetimos el mismo experimento con dos barras de vidrio que han sido frotadas con seda (figura 21.1*b*). Sin embargo, si utilizamos una barra de plástico frotada con piel y una varilla de vidrio frotada con seda, observaremos que las barras se atraen entre sí (figura 21.1*c*).

Al frotar una barra, ésta se carga eléctricamente. Repitiendo el experimento con diversos tipos de materiales, vemos que todos los objetos cargados pueden clasificarse en dos grupos: aquellos que se cargan como la barra de plástico frotada con un trozo de piel y los que se cargan como la varilla de vidrio frotada con un paño de seda. Los objetos de un mismo grupo se repelen entre sí, mientras que los de grupos diferentes se atraen. Benjamín Franklin propuso un modelo de electricidad para explicar este fenómeno. Sugirió que todo objeto posee una cantidad *normal* de electricidad y que cuando dos objetos están muy próximos, por ejemplo cuando se frotan entre sí, parte de la electricidad se transfiere de un cuerpo al otro: así pues, uno tiene un exceso de carga y el otro una deficiencia de carga de valor igual. Franklin describió las cargas resultantes con los signos más y menos. Al tipo de carga adquirida por una barra de vidrio frotada con un paño de seda le llamó positiva, lo cual significaba que el paño de seda adquiría una carga negativa de igual magnitud.

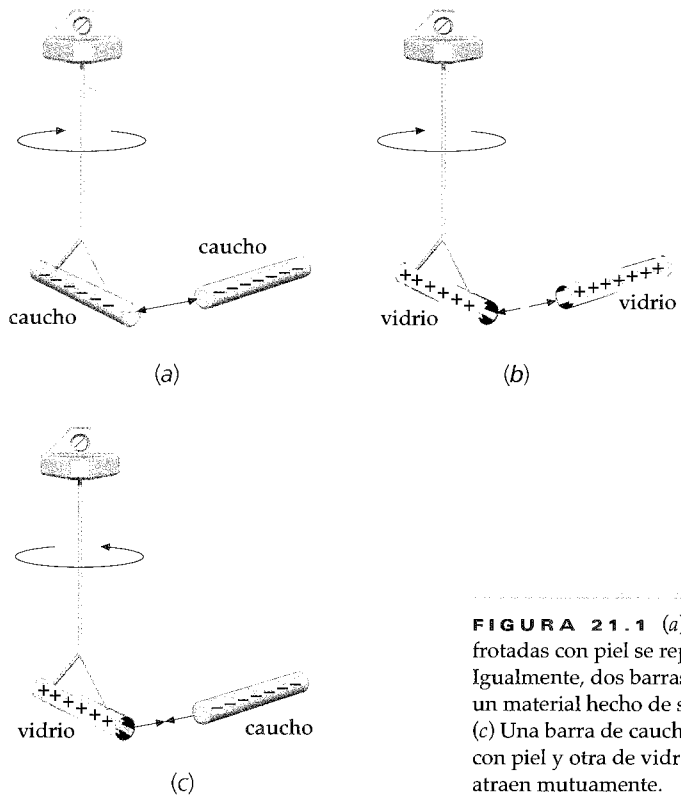


FIGURA 21.1 (*a*) Dos barras de caucho frotadas con piel se repelen mutuamente. (*b*) Igualmente, dos barras de vidrio frotadas con un material hecho de seda, se repelen entre sí. (*c*) Una barra de caucho que ha sido frotada con piel y otra de vidrio frotada con seda se atraen mutuamente.

Según esta elección de Franklin, el plástico frotado con una piel adquiere una carga negativa y la piel adquiere una carga positiva de igual magnitud. Dos objetos que portan el mismo tipo de carga se repelen entre sí, mientras que si portan cargas opuestas se atraen mutuamente (figura 21.1).

Actualmente, es bien conocido que cuando un vidrio se frota con un trozo de seda, se transfieren electrones del vidrio al pedazo de seda. De acuerdo con la convención de Franklin, todavía en uso, la seda está cargada negativamente, y, consecuentemente, decimos que los electrones tienen carga negativa. La tabla 21.1 corresponde a una versión reducida de una **serie triboeléctrica** (en griego *tribos* significa rozamiento). En esta serie, cuanto más baja es la ubicación de un material, mayor es su afinidad por captar electrones. Si dos materiales se ponen en contacto mediante rozamiento, se transfieren electrones del de la zona superior al de la inferior. Por ejemplo, electrones del nailon son transferidos al teflón cuando ambos se frotan entre sí.

Tabla 21.1

+ Extremo positivo de la serie
Amianto
Vidrio
Nailon
Lana
Plomo
Seda
Aluminio
Papel
Algodón
Acero
Caucho (goma dura)
Níquel y cobre
Latón y plata
Goma sintética
Fibra acrílica
Plástico flexible
Polietileno
Teflón
Goma de silicona
− Extremo negativo de la serie

CUANTIZACIÓN DE LA CARGA

La materia está formada por átomos eléctricamente neutros. Cada átomo posee un pequeño, pero masivo, núcleo que contiene protones y neutrones. Los protones están cargados positivamente, mientras que los neutrones no poseen carga. El número de protones en el núcleo es el número atómico Z del elemento. Rodeando al núcleo existe un número igual de electrones negativamente cargados, de modo que el átomo posee una carga neta cero. La masa del electrón es aproximadamente 2000 veces menor que la del protón. Sin embargo, sus cargas son exactamente iguales pero de signo contrario. La carga del protón es e y la del electrón $-e$, siendo e la **unidad fundamental de carga**. La carga de un electrón o protón es una propiedad intrínseca de la partícula; del mismo modo, la masa y el espín de estas partículas son también propiedades intrínsecas de las mismas.

Todas las cargas observables se presentan en cantidades enteras de la unidad fundamental de carga e. Es decir, la carga está cuantizada. Toda carga Q presente en la naturaleza puede escribirse en la forma $Q = \pm Ne$, siendo N un número entero.* Sin embargo, en los objetos ordinarios, N es habitualmente un número muy grande y la carga parece ser continua, del mismo modo que el aire parece ser un medio continuo aunque realmente consta de muchas moléculas discretas. Por ejemplo, al cargar una barra de plástico frotándola con un trozo de piel se transfieren del orden de 10^{10} electrones a la barra.

CONSERVACIÓN DE LA CARGA

Cuando dos objetos se frotan entre sí, uno de ellos queda con un exceso de electrones y, por lo tanto, cargado negativamente, y el otro queda con un déficit de electrones y, en consecuencia, cargado positivamente. La carga total, suma de la de los dos objetos, no cambia. Es decir, la *carga se conserva*. La **ley de conservación de la carga** es una ley fundamental de la naturaleza. En ciertas interacciones entre partículas elementales puede ocurrir que los electrones se creen o destruyan. Sin embargo, en todos estos procesos, se producen o destruyen cantidades iguales de cargas negativas y positivas, de manera que la carga del universo no varía.

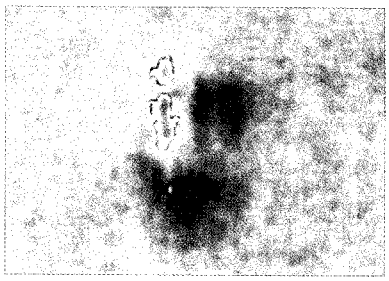
La unidad de carga del SI es el coulomb, el cual se define en función de la unidad de corriente o intensidad eléctrica, el ampere (A).† El **coulomb** (C) es la cantidad de carga que fluye a través de un cable conductor en un segundo cuando la intensidad de corriente en el cable es de un ampere. La unidad fundamental de carga eléctrica e está relacionada con el coulomb por

$$e = 1{,}602177 \times 10^{-19}\ \mathrm{C} \approx 1{,}60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C} \qquad 21.1$$

UNIDAD FUNDAMENTAL DE CARGA

* En el modelo estándar de partículas elementales, los protones, neutrones y otras partículas elementales están constituidas por partículas aún más fundamentales y primigenias llamadas *quarks*, las cuales poseen cargas de $\pm\frac{1}{3}e$ o $\pm\frac{2}{3}e$. Los quarks no se han observado como partículas individuales. Sólo se han observado combinaciones de estas partículas elementales que constituyen una carga neta de $\pm Ne$, siendo N un número entero.

† El ampere (A) es la unidad de corriente eléctrica.



Carga por contacto. Una muestra de plástico de anchura 0,02 mm fue cargada mediante contacto con una pieza de níquel. Aunque el plástico posee una carga neta positiva, se aprecian regiones de carga negativa (oscuras) y regiones de carga positiva (amarillo). La fotografía se tomó barriendo una aguja cargada, de anchura 10^{-7} m, sobre la muestra y midiendo la fuerza electrostática sobre la aguja. *(Bruce Terris/IBM Almaden Research Center.)*

PROBLEMA PRÁCTICO 21.1
Una carga de 50 nC (1 nC = 10^{-9} C) puede producirse en el laboratorio simplemente frotando entre sí dos objetos. ¿Cuántos electrones deben ser transferidos para producir esta carga?

Ejemplo 21.1 ¿Cuánta carga hay en una moneda?

Una moneda de cobre* (Z = 29) tiene una masa de 3,10 g. ¿Cuál es la carga total de todos los electrones contenidos en la moneda?

PLANTEAMIENTO La carga total de los electrones contenidos en una moneda viene dada por el número de éstos, N_e, multiplicado por la carga de uno de ellos, $-e$. Por tanto, el número de electrones será 29 veces el número de átomos de cobre, N_{at}. Para determinar N_{at} hay que tener en cuenta que un mol de cualquier sustancia tiene un número de moléculas igual al número de Avogadro ($N_A = 6{,}02 \times 10^{23}$) y el número de gramos de un mol es la masa molecular M, que para el cobre es 63,5 g/mol. Como la molécula de cobre es monoatómica, determinaremos el número de átomos por gramo dividiendo el N_A (átomos por mol) por el peso molecular M (gramos por mol).

SOLUCIÓN

1. La carga total es el número de electrones multiplicado por la carga electrónica: $Q = N_e(-e)$
2. El número de electrones es el número atómico Z multiplicado por el número de átomos de cobre, N_{at}: $N_e = ZN_{at}$
3. Calcular el número de átomos de cobre en 3,10 g de este metal: $N_{at} = (3{,}10\text{ g})\dfrac{6{,}02 \times 10^{23}\text{ átomos/mol}}{63{,}5\text{ g/mol}} = 2{,}94 \times 10^{22}\text{ átomos}$
4. Calcular el número de electrones, N_e: $N_e = ZN_{at} = (29\text{ electrones/átomo})(2{,}94 \times 10^{22}\text{ átomos}) = 8{,}53 \times 10^{23}\text{ electrones}$
5. Utilizar este valor de N_e para determinar la carga total: $Q = N_e \times (-e) = (8{,}53 \times 10^{23}\text{ electrones})(-1{,}60 \times 10^{-19}\text{ C/electrón}) = \boxed{-1{,}37 \times 10^5\text{ C}}$

COMPROBACIÓN Hay $29 \times (6{,}02 \times 10^{23})$ electrones en 63,5 g de cobre. Por lo tanto, en 3,5 gramos de este material hay $(3{,}10/63{,}5) \times 29 \times (6{,}02 \times 10^{23}) = 8{,}53 \times 10^{23}$ electrones, lo cual está de acuerdo con el paso 4 del resultado del ejercicio.

PROBLEMA PRÁCTICO 21.2 Si cada habitante de los EE.UU. (aproximadamente 300 millones de habitantes) recibiera un millón de electrones, ¿qué porcentaje del número de electrones contenido en la moneda representaría?

* Desde 1793 hasta 1837, el penique estaba compuesto del 100% de cobre. En 1982, se cambió la composición pasando de 5% de cinc y 95% de cobre a una composición de 97,5% de cinc y 2,5% de cobre.

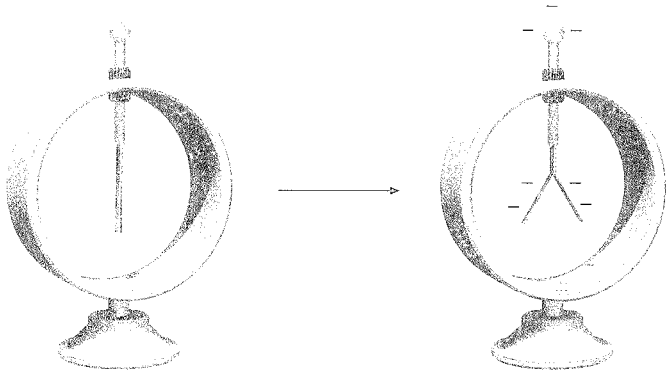


FIGURA 21.2 Electroscopio. Dos hojas de oro se conectan a una barra metálica terminada en la parte superior por una esfera de metal. Asimismo, las hojas están aisladas del recipiente. Cuando no están cargadas, las hojas cuelgan en dirección vertical, juntas. Cuando se toca la esfera con una barra de plástico cargada negativamente, se transfieren algunas cargas negativas de la barra a la esfera, y de ésta son conducidas a las hojas de oro, las cuales se separan entre ellas debido a la repulsión de sus respectivas cargas negativas. Si se toca la esfera con una barra de vidrio cargada positivamente, las hojas también se separan. (Poniendo en contacto la bola con una barra de vidrio cargada positivamente, las hojas de oro deberían separarse. En este caso, la barra de vidrio cargada positivamente atrae electrones de la esfera de metal, dejando una carga neta positiva en la bola, en la barra y en las hojas.)

21.2 CONDUCTORES Y AISLANTES

En muchos materiales, tales como el cobre y otros metales, parte de los electrones pueden moverse libremente en el seno del material. Estos materiales se denominan **conductores**. En otros materiales, tales como la madera o vidrio, todos los electrones están ligados a los átomos próximos y ninguno puede moverse libremente. Estos materiales se denominan **aislantes**.

En un átomo de cobre aislado, existen 29 electrones ligados al núcleo por atracción electrostática entre los electrones cargados negativamente y los núcleos cargados positivamente. Los electrones más externos están ligados más débilmente que los más internos a causa de su mayor distancia al núcleo y a la repulsión de los electrones más internos. Cuando un gran número de átomos de cobre se combinan en una pieza de cobre metálico, el enlace de los electrones de cada átomo individual se reduce debido a las interacciones con los átomos próximos. Uno o más de los electrones externos de cada átomo queda en libertad para moverse por todo el metal, del mismo modo que una molécula de gas se mueve en el interior de una caja. El número de electrones libres depende del metal de que se trate, pero generalmente es de alrededor de un electrón por átomo. Cuando a un átomo se le quita o se le añade un electrón, apareciendo una carga neta, se convierte en un **ion**. En el cobre metálico, los iones de cobre se distribuyen regularmente formando una *red*. Normalmente, un conductor es eléctricamente neutro porque existe un ion en la red portador de una carga positiva $+e$ por cada electrón libre portador de una carga negativa $-e$. La carga neta de un conductor puede variar por adición o extracción de electrones. Un conductor con una carga neta negativa tiene un exceso de electrones libres, mientras que un conductor con una carga neta positiva tiene un déficit de los mismos.

COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 21.1

Una esfera conductora con carga $+Q$ se pone en contacto con otra esfera, también conductora e idéntica de tamaño a la anterior y con carga inicial nula. (*a*) ¿Cuál será la carga de cada esfera después de que se establezca el contacto? (*b*) Estando las esferas en contacto, una barra cargada positivamente se aproxima a una de estas esferas, causando una redistribución de las cargas de las dos esferas, de forma que la que está más próxima a la barra tiene una carga $-Q$. ¿Cuál es la carga de la otra esfera?

CARGA POR INDUCCIÓN

La conservación de la carga puede ilustrase mediante un método simple de cargar un conductor llamado **carga por inducción**, que se muestra en la figura 21.3. Dos esferas metálicas sin carga están en contacto. Al acercar a una de las esferas una barra cargada, los electrones fluyen de una esfera a la otra, acercándose a la barra si ésta se encuentra positivamente cargada o alejándose si su carga es negativa. Si la barra está cargada positivamente (figura 21.3*a*), atrae a los electrones y la esfera más próxima a la barra adquiere electrones de la otra. La esfera más próxima adquiere carga ne-

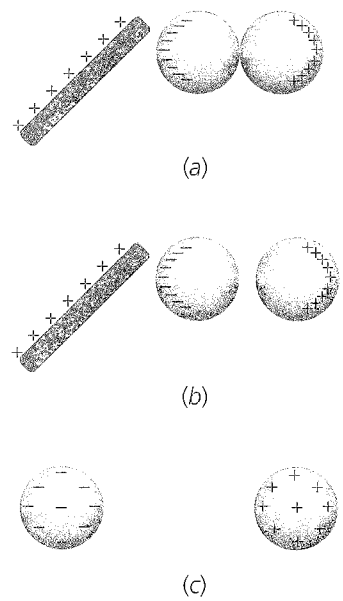


FIGURA 21.3 Carga por inducción. (*a*) Los dos conductores esféricos en contacto adquieren cargas opuestas cuando la barra cargada positivamente atrae a los electrones hacia la esfera de la izquierda. (*b*) Si las esferas se separan sin mover la barra de su posición, éstas retienen sus cargas iguales y opuestas. (*c*) Si la barra se retira y las esferas se separan, éstas quedan uniformemente cargadas con cargas iguales y opuestas.

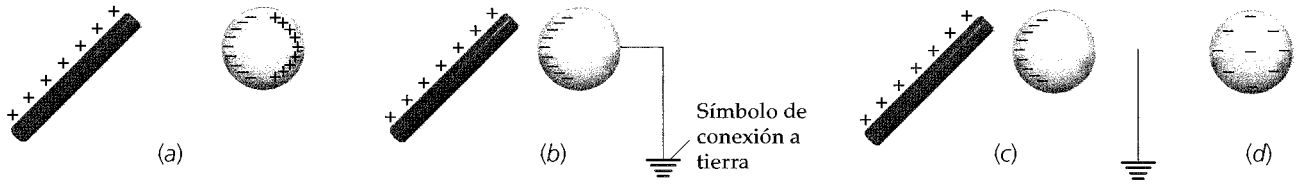


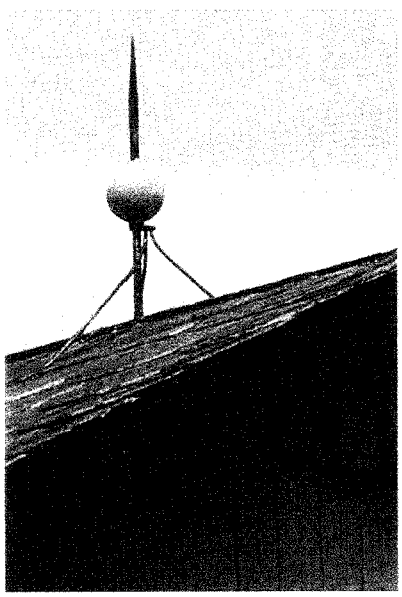
FIGURA 21.4 Inducción por conexión a tierra. (*a*) La carga libre sobre una esfera conductora se polariza mediante la barra cargada positivamente, que atrae las cargas negativas de la esfera. (*b*) Si la esfera se conecta a un conductor muy grande, tal como la Tierra, por medio de un alambre, los electrones del suelo neutralizan la carga positiva del lado más alejado de la barra y la esfera queda negativamente cargada. (*c*) La carga negativa permanece si el cable se desconecta antes de separar la barra. (*d*) Al quitar la barra, la esfera queda cargada negativamente de forma uniforme.

gativa y la más alejada queda con una carga neta igual, pero positiva. Cuando un conductor tiene cargas *separadas* iguales y opuestas se dice que está **polarizado**. Si las esferas se separan antes de retirar la barra, quedarán con cantidades iguales de cargas opuestas (figura 21.3*b*). Un resultado semejante se obtiene con una barra cargada negativamente; los electrones pasarían de la esfera más próxima a la más alejada.

La propia Tierra constituye un conductor que para muchos propósitos puede considerarse infinitamente grande y con un suministro de carga libre abundante. Cuando un conductor se pone en contacto con el suelo se dice que está **conectado a tierra**. Esto se representa esquemáticamente mediante un cable de conducción que termina en unas pequeñas líneas paralelas, como indica la figura 21.4*b*. La figura 21.4 muestra cómo puede inducirse una carga en un conductor simple transfiriendo electrones desde el suelo y, a continuación, interrumpiendo la conexión a tierra. (En la práctica, una persona que estuviera en el suelo tocando con sus manos la esfera podría servir como ejemplo de la demostración electrostática descrita aquí.)

COMPRUEBA SU RAZONAMIENTO

Se cargan dos esferas idénticas conductoras mediante inducción electrostática y seguidamente se separan a gran distancia una de la otra; la esfera 1 tiene carga $+Q$ y la esfera 2, carga $-Q$. Se dispone de una tercera esfera idéntica a las otras dos e inicialmente descargada. Si las esferas 3 y 1 se ponen en contacto y, seguidamente, se separan, y luego se ponen en contacto la 3 y la 2 y se separan, ¿cuál será la carga final de cada una de las tres esferas?



El pararrayos de este edificio está conectado a tierra para conducir los electrones desde el suelo a las nubes cargadas positivamente a fin de neutralizarlas. (© *Grant Heilman.*)

Estas damas utilizan sombreros con cadenas metálicas que arrastran por el suelo, supuestamente para protegerse contra los rayos. (*Ann Roman Picture Library.*)

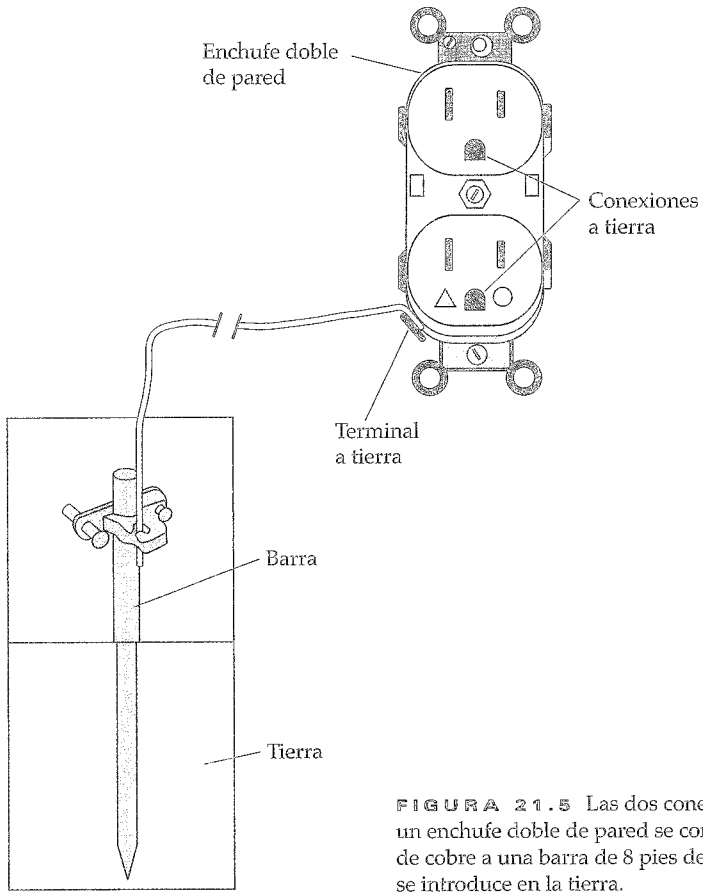


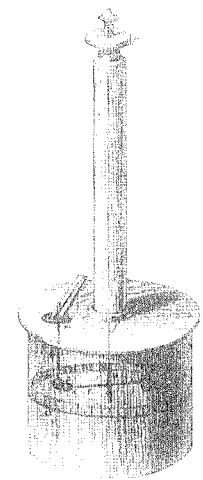
FIGURA 21.5 Las dos conexiones a tierra de un enchufe doble de pared se conectan con un hilo de cobre a una barra de 8 pies de longitud, la cual se introduce en la tierra.

21.3 LEY DE COULOMB

La fuerza ejercida por una carga sobre otra fue estudiada por Charles Coulomb (1736–1806) mediante una balanza de torsión de su propia invención.* En el experimento de Coulomb las esferas cargadas eran mucho menores que la distancia entre ellas, de modo que las cargas podían considerarse como puntuales. Coulomb utilizó el fenómeno de inducción para producir esferas igualmente cargadas y poder variar la carga depositada sobre ellas. Por ejemplo, comenzando con una carga q_0 sobre cada esfera, podía reducir la carga a $\frac{1}{2}q_0$ conectando a tierra una de las esferas temporalmente para descargarla, tras lo cual la desconectaba de tierra y ponía las dos esferas en contacto. Los resultados de los experimentos de Coulomb y otros científicos se resumen en la **ley de Coulomb**:

> La fuerza ejercida por una carga puntual sobre otra está dirigida a lo largo de la línea que las une. La fuerza varía inversamente con el cuadrado de la distancia que separa las cargas y es proporcional al producto de las mismas. Es repulsiva si las cargas tienen el mismo signo y atractiva si las cargas tienen signos opuestos.

LEY DE COULOMB



Balanza de torsión de Coulomb. *(Bundy Library, Norwalk, CT.)*

* El aparato experimental de Coulomb era esencialmente el mismo que se describió en el experimento de Cavendish (capítulo 11), con las masas reemplazadas por pequeñas esferas cargadas. La atracción gravitatoria de las esferas es completamente despreciable comparada con la atracción o repulsión eléctrica producida por las cargas depositadas en las esferas por frotamiento.

El *módulo* de la fuerza eléctrica ejercida por una carga puntual q_1 sobre otra carga puntual q_2 a la distancia r viene dada por

$$F = \frac{k|q_1 q_2|}{r^2} \qquad 21.2$$

LEY DE COULOMB PARA LA FUERZA EJERCIDA POR q_1 SOBRE q_2

donde k es una constante positiva determinada experimentalmente conocida como **constante de Coulomb**, que tiene el valor

$$k = 8{,}99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2} \qquad 21.3$$

Si q_1 se encuentra en la posición $\vec{r}_1$ y q_2 en $\vec{r}_2$ (figura 21.6), la fuerza $\vec{F}_{12}$ ejercida por q_1 sobre q_2 es

$$\vec{F}_{12} = \frac{k q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12} \qquad 21.4$$

LEY DE COULOMB (FORMA VECTORIAL)

donde $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ es el vector que apunta de q_1 a q_2, y $\hat{r}_{12} = \vec{r}_{12}/r_{12}$ es un vector unitario que apunta de q_1 a q_2.

De acuerdo con la tercera ley de Newton, la fuerza $\vec{F}_{21}$ ejercida por q_2 sobre q_1 es de sentido contrario a la fuerza $\vec{F}_{12}$. Obsérvese la semejanza entre la ley de Coulomb y la ley de Newton de la gravedad (ecuación 11.3). Ambas son leyes que dependen de la inversa del cuadrado de la distancia. Sin embargo, la fuerza gravitatoria entre dos partículas es proporcional a las masas de las partículas y es siempre atractiva, mientras que la fuerza eléctrica es proporcional a las cargas de las partículas y es repulsiva si ambas cargas tienen el mismo signo y atractiva si tienen signos contrarios.

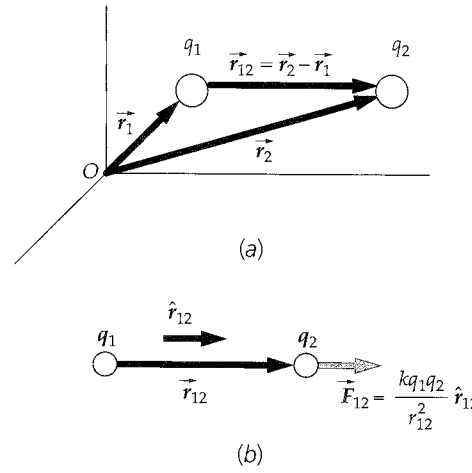


FIGURA 21.6 (*a*) Carga q_1 en la posición $\vec{r}_1$ y carga q_2 en $\vec{r}_2$, ambas respecto al origen O. La fuerza ejercida por q_1 sobre q_2 está en la dirección y sentido del vector $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ si ambas cargas tienen el mismo signo, y en sentido opuesto si sus signos son contrarios. El vector unitario $\hat{r}_{12} = \vec{r}_{12}/r_{12}$ tiene la dirección del vector que une la carga q_1 con la q_2.

La ecuación 21.4 da la dirección correcta para la fuerza en los casos en que ambas cargas sean positivas, negativas o de diferente signo.

Ejemplo 21.2 Fuerza eléctrica en un átomo de hidrógeno

En el átomo de hidrógeno, el electrón está separado del protón por una distancia media de aproximadamente $5{,}3 \times 10^{-11}$ m. ¿Cuál es el módulo de la fuerza electrostática ejercida por el protón sobre el electrón?

PLANTEAMIENTO Asígnese la carga q_1 al protón y q_2 al electrón. Se utiliza la ley de Coulomb para determinar el módulo de la fuerza de atracción electrostática entre el protón y el electrón.

SOLUCIÓN

1. Se dibuja el electrón y el protón colocándolos en el dibujo con sendos símbolos diferenciados (figura 21.7):

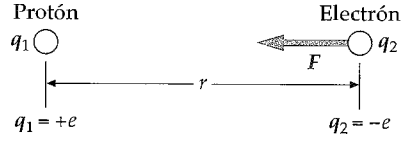


FIGURA 21.7

2. Usar la ecuación 21.2 (ley de Coulomb) para calcular la fuerza electrostática:

$$F = \frac{k|q_1 q_2|}{r^2} = \frac{ke^2}{r^2} = \frac{(8{,}99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(1{,}60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{(5{,}3 \times 10^{-11}\ \mathrm{m})^2}$$

$$= \boxed{8{,}2 \times 10^{-8}\ \mathrm{N}}$$

COMPROBACIÓN El orden de magnitud está dentro de lo esperado. Las potencias de diez en el numerador combinadas son $10^9 \times 10^{-38} = 10^{-29}$, la potencia de diez en el denominador es 10^{-22}, y $10^{-29}/10^{-22} = 10^{-7}$. Comparando con el resultado, se tiene que $8{,}2 \times 10^{-8} \approx 10^{-7}$.

OBSERVACIÓN Comparada con las interacciones macroscópicas, esta fuerza es muy pequeña. Sin embargo, como la masa del electrón es tan pequeña, aproximadamente 10^{-30} kg, esta fuerza produce una aceleración enorme, $F/m \approx 9 \times 10^{22}$ m/s^2. La masa del protón es casi 2000 veces mayor que la del electrón, así que la aceleración del protón es alrededor de 4×10^{19} m/s^2. Compárese esta aceleración con la debida a la gravedad, $g = 10$ m/s^2.

PROBLEMA PRÁCTICO 21.3 Dos cargas puntuales de 0,0500 μC cada una se colocan separadas por una distancia de 10 cm. Calcular el módulo de la fuerza ejercida por una de las cargas sobre la otra.

Puesto que tanto la fuerza eléctrica como la fuerza gravitatoria entre dos partículas varían en razón inversa con el cuadrado de su separación, la relación entre estas dos fuerzas es independiente de la distancia que separa las partículas. Podemos, pues, comparar las intensidades relativas de estas dos fuerzas en partículas elementales, tales como el electrón y el protón.

Ejemplo 21.3 Comparación cuantitativa entre las fuerzas eléctrica y gravitatoria

Calcular la relación que existe entre la fuerza eléctrica y la fuerza gravitatoria ejercidas entre el protón y el electrón de un átomo de hidrógeno.

PLANTEAMIENTO Utilizamos la ley de Coulomb con $q_1 = e$ y $q_2 = -e$ para hallar la fuerza eléctrica. Y usamos la ley de la gravitación de Newton junto con la masa del protón, $m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg, y la masa del electrón, $m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg, para hallar la fuerza de la gravedad.

SOLUCIÓN

1. Expresar los módulos de la fuerza eléctrica F_e y la fuerza gravitatoria F_g en función de las cargas, masas, distancia de separación r y las constantes eléctrica y de gravitación:

$$F_e = \frac{ke^2}{r^2} \qquad F_g = \frac{Gm_p m_e}{r^2}$$

2. Determinar la relación de ambas fuerzas. Obsérvese que la distancia de separación r se anula:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{ke^2}{Gm_p m_e}$$

3. Sustituir por los valores numéricos:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{(8{,}99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(1{,}60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{(6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2})(1{,}67 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg})(9{,}11 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg})}$$

$$= \boxed{2{,}27 \times 10^{39}}$$

COMPROBACIÓN En el paso 3, las unidades eléctricas se cancelan en el numerador de la fracción. En el denominador se cancelan las unidades de masa. En consecuencia, tanto en el numerador como en el denominador, las unidades son N · m^2. Por lo tanto, la fracción no tiene dimensiones, como era de esperar, ya que es una relación entre dos fuerzas.

OBSERVACIÓN Este resultado demuestra por qué los efectos de la gravedad no se consideran al tratar las interacciones atómicas o moleculares.

Aunque la fuerza gravitatoria es increíblemente pequeña comparada con la fuerza eléctrica y prácticamente no desempeña papel alguno a nivel atómico, la gravedad es la fuerza dominante entre sistemas grandes, como planetas y estrellas, porque estos objetos poseen un número casi igual de cargas positivas y negativas y, por lo tanto, se neutralizan las fuerzas eléctricas atractivas y repulsivas. La fuerza neta entre objetos astronómicos es esencialmente la fuerza de atracción gravitatoria.

FUERZA EJERCIDA POR UN SISTEMA DE CARGAS

En un sistema de cargas, cada una de ellas ejerce una fuerza dada por la ecuación 21.4 sobre cada una de las restantes. Así, la fuerza neta sobre cada carga es la suma vectorial de las fuerzas individuales ejercidas sobre dicha carga por las restantes cargas del sistema. Esta es una consecuencia del *principio de superposición* de las fuerzas.

Véase el
Apéndice de matemáticas
para más información sobre
Trigonometría

Ejemplo 21.4 Fuerza neta

Tres cargas puntuales se encuentran sobre el eje x; q_1 está en el origen, q_2 en $x = 2$ m y q_0 en x ($x > 2$ m). (*a*) Determinar la fuerza neta sobre q_0 ejercida por q_1 y q_2 si $q_1 = +25$ nC, $q_2 = -10$ nC y $x = 3{,}5$ m. (*b*) Obtener una expresión de la fuerza neta sobre q_0 debida a q_1 y q_2 en el intervalo $2\text{ m} < x < \infty$.

PLANTEAMIENTO La fuerza neta sobre q_0 es el vector suma de la fuerza $\vec{F}_{10}$ ejercida por q_1 y la fuerza $\vec{F}_{20}$ ejercida por q_2. Las fuerzas individuales se determinan mediante la ley de Coulomb. Obsérvese que $\hat{r}_{10} = \hat{r}_{20} = \hat{i}$ pues $\hat{r}_{10}$ y $\hat{r}_{20}$ se encuentran ambos en la dirección positiva de x.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibujar un croquis del sistema de cargas (figura 21.8*a*). Indicar las distancias r_{10} y r_{20}:

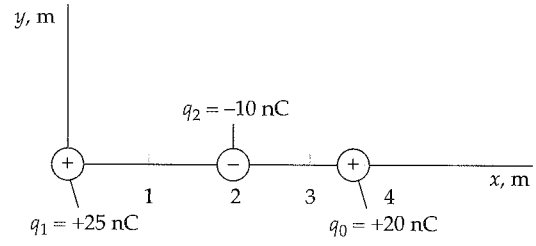


FIGURA 21.8*a*

2. Hallar la fuerza ejercida por la carga q_1 sobre la q_0. Estas cargas se repelen por ser del mismo signo. La fuerza tiene la dirección del eje x:

$$F_{10} = \frac{k|q_1 q_0|}{r_{10}^2}$$

$$\vec{F}_{10} = +F_{10}\hat{i} = +\frac{k|q_1 q_0|}{r_{10}^2}\hat{i} = \frac{(8{,}99 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(25 \times 10^{-9}\ \text{C})(20 \times 10^{-9}\ \text{C})}{(3{,}5\ \text{m})^2}\hat{i}$$

$$= (0{,}37 \times 10^{-6}\ \text{N})\hat{i}$$

3. Hallar la fuerza ejercida por la carga q_2 sobre la q_0. Estas cargas se atraen por ser de diferente signo. La fuerza tiene la dirección del eje $-x$:

$$F_{20} = \frac{k|q_2 q_0|}{r_{20}^2}$$

$$\vec{F}_{20} = -F_{20}\hat{i} = -\frac{k|q_2 q_0|}{r_{20}^2}\hat{i} = -\frac{(8{,}99 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(10 \times 10^{-9}\ \text{C})(20 \times 10^{-9}\ \text{C})}{(1{,}5\ \text{m})^2}\hat{i}$$

$$= -(0{,}80 \times 10^{-6}\ \text{N})\hat{i}$$

4. Sumar los resultados para obtener la fuerza neta:

$$\vec{F}_{\text{neta}} = \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20} = \boxed{-(0{,}43 \times 10^{-6}\ \text{N})\hat{i}}$$

(*b*) 1. Dibujar la configuración geométrica de las cargas, definiendo las distancias r_{10} y r_{20} (figura 21.8*b*):

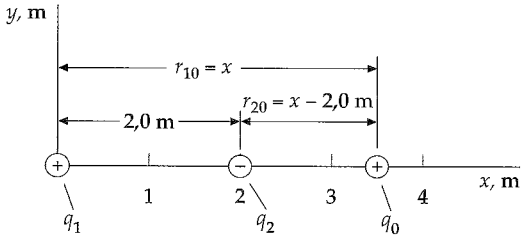


FIGURA 21.8*b*

2. Obtener una expresión para la fuerza debida a la carga q_1: $\vec{F}_{10} = \frac{k|q_1 q_0|}{x^2}\hat{i}$

3. Obtener una expresión para la fuerza debida a la carga q_2: $\vec{F}_{20} = -\frac{k|q_2 q_0|}{(x - 2{,}0\text{ m})^2}\hat{i}$

4. Sumar los dos vectores resultantes obtenidos en 2 y 3, para obtener la fuerza neta: $\vec{F}_{\text{neta}} = \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20} = \left(\frac{k|q_1 q_0|}{x^2} - \frac{k|q_2 q_0|}{(x - 2{,}0\text{ m})^2}\right)\hat{i}$

COMPROBACIÓN En los pasos 2, 3 y 4 de la parte (*b*), ambas fuerzas tienden a cero cuando x tiende a infinito, como era de esperar. Además, tal como estaba previsto, el módulo de la fuerza en el paso 3 tiende a infinito cuando x tiende a 2,0 m.

OBSERVACIÓN La carga q_2 está localizada entre la q_1 y q_0, lo cual podría inducir a pensar que la presencia de q_2 podría afectar a la fuerza $\vec{F}_{10}$ que ejerce la q_1 sobre la q_0. Sin embargo, esto no es así, ya que la presencia de q_2 no tiene influencia en la fuerza que ejerce la q_1 sobre la q_0. (Este hecho se denomina principio de superposición.) La figura 21.9 muestra la componente x de la fuerza F_x sobre q_0 como una función de su posición x en la región 2 m < x < ∞. Cerca de q_2 domina la fuerza debida a q_2, y como las cargas opuestas se atraen, la fuerza sobre q_0 está dirigida hacia el sentido negativo de las x. Para $x >> 2$ m, la fuerza está dirigida en el sentido positivo de las x porque la distancia entre q_1 y q_2 es despreciable, de modo que la fuerza debida a las dos cargas es casi la misma que si hubiese una única carga de +15 nC.

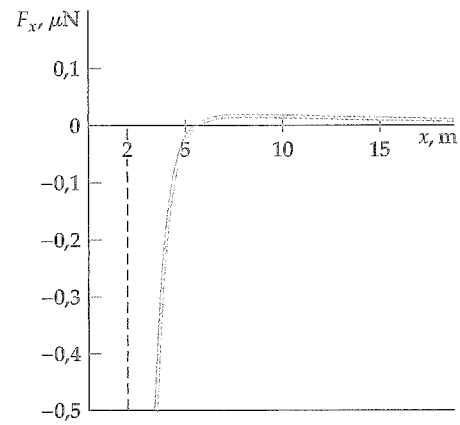


FIGURA 21.9

PROBLEMA PRÁCTICO 21.4 Si q_0 se encuentra en $x = 1$ m, determinar la fuerza neta que actúa sobre q_0.

Para que un sistema de cargas permanezca estacionario, deben existir otras fuerzas no eléctricas actuando sobre las cargas, de modo que la fuerza resultante de todas las fuerzas que actúan sobre cada carga sea cero. En el ejemplo anterior y en los siguientes, supondremos la existencia de tales fuerzas, de modo que todas las cargas permanecen estacionarias.

Ejemplo 21.5 Fuerza neta en dos dimensiones

La carga $q_1 = +25$ nC está en el origen, la carga $q_2 = -15$ nC está sobre el eje x en $x = 2$ m, y la carga $q_0 = +20$ nC está en el punto $x = 2$ m, $y = 2$ m, como se indica en la figura 21.10. Determinar el vector de la fuerza resultante sobre q_0.

PLANTEAMIENTO La fuerza resultante es la suma vectorial de las fuerzas individuales ejercidas por cada una de las cargas sobre q_0. Calcularemos cada una de las fuerzas a partir de la ley de Coulomb y la escribiremos en función de sus componentes rectangulares.

SOLUCIÓN

1. Dibujar las posiciones de las tres cargas en un sistema de ejes coordenados. Mostrar la fuerza resultante $\vec{F}$ sobre la carga q_0 como suma vectorial de las fuerzas $\vec{F}_{10}$ debida a q_1 y $\vec{F}_{20}$ debida a q_2 (figura 21.10*a*):

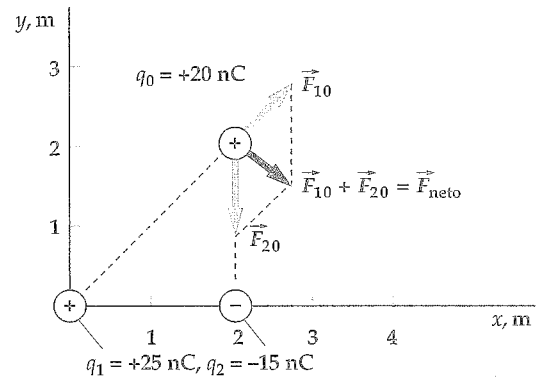


FIGURA 21.10*a*

2. La fuerza resultante $\vec{F}$ sobre q_0 es la suma de las fuerzas individuales:

$$\vec{F} = \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20}$$
así $\Sigma F_x = F_{10x} + F_{20x}$ y $\Sigma F_y = F_{10y} + F_{20y}$

3. La fuerza $\vec{F}_{10}$ está dirigida a lo largo de la línea dirigida de q_1 a q_0. Utilizar $r_{10} = 2{,}0\sqrt{2}$ m como distancia entre q_1 y q_0, para calcular el módulo de la fuerza:

$$F_{10} = \frac{k|q_1q_0|}{r_{10}^2} = \frac{(8{,}99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(25 \times 10^{-9}\ \mathrm{C})(20 \times 10^{-9}\ \mathrm{C})}{(2{,}0\sqrt{2}\ \mathrm{m})^2}$$
$$= 5{,}62 \times 10^{-7}\ \mathrm{N}$$

4. Como $\vec{F}_{10}$ forma un ángulo de 45° con los ejes x e y, sus componentes x e y son iguales entre sí:

$$F_{10x} = F_{10y} = F_{10}\cos 45° = (5{,}62 \times 10^{-7}\mathrm{N})\cos 45°$$
$$= 3{,}97 \times 10^{-7}\ \mathrm{N}$$

5. La fuerza $\vec{F}_{20}$ ejercida por q_2 sobre q_0 es atractiva en la dirección $-y$, como se muestra en la figura 21.10*a*:

$$\vec{F}_{20} = -\frac{k|q_2q_0|}{r_{20}^2}\hat{j} = -\frac{(8{,}99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(15 \times 10^{-9}\ \mathrm{C})(20 \times 10^{-9}\ \mathrm{C})}{(2{,}0\ \mathrm{m})^2}\hat{j}$$
$$= -(6{,}74 \times 10^{-7}\mathrm{N})\hat{j}$$

6. Calcular las componentes de la fuerza resultante:

$$F_x = F_{10x} + F_{20x} = (3{,}97 \times 10^{-7}\ \mathrm{N}) + 0 = 3{,}97 \times 10^{-7}\ \mathrm{N}$$
$$F_y = F_{10y} + F_{20y} = (3{,}97 \times 10^{-7}\ \mathrm{N}) + (-6{,}74 \times 10^{-7}\ \mathrm{N})$$
$$F_y = -2{,}77 \times 10^{-7}\ \mathrm{N}$$

7. Dibujar la fuerza resultante (figura 21.10*b*) y sus dos componentes:

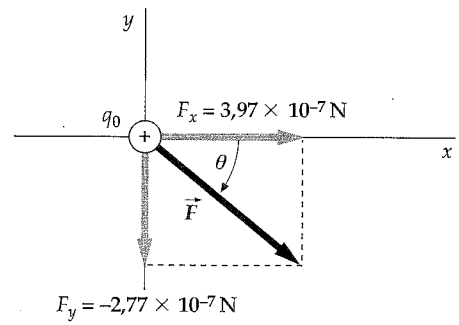


FIGURA 21.10*b*

8. El módulo de la fuerza resultante se determina a partir de sus componentes:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(3{,}97 \times 10^{-7}\ \mathrm{N})^2 + (-2{,}77 \times 10^{-7}\ \mathrm{N})^2}$$
$$= 4{,}84 \times 10^{-7}\ \mathrm{N} = \boxed{4{,}8 \times 10^{-7}\ \mathrm{N}}$$

9. La fuerza resultante apunta hacia la derecha y hacia abajo, como se muestra en la figura 21.10*b*, formando con el eje x un ángulo θ dado por:

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{-2{,}77}{3{,}97} = -0{,}698$$
$$\theta = \mathrm{arctg}\,(-0{,}698) = -34{,}9° = \boxed{-35°}$$

COMPROBACIÓN Comparando los resultados de los pasos 3 y 5, podemos constatar que los módulos de estas dos fuerzas son relativamente parecidos aunque $|q_1|$ es algo mayor que $|q_2|$, ya que la diferencia entre el valor de q_2 y q_0 es menor que la existente entre q_1 y q_0.

PROBLEMA PRÁCTICO 21.5 Expresar $\hat{r}_{10}$ del ejemplo 21.5 en combinación lineal de los vectores unitarios $\hat{i}$ y $\hat{j}$.

PROBLEMA PRÁCTICO 21.6 En el ejemplo 21.5, donde x_{10} es la componente de $\hat{r}_{10}$, ¿la componente x de la fuerza $\vec{F}_{10} = (kq_1q_0/r_{10}^2)\hat{r}_{10}$ es igual a kq_1q_0/x_{10}^2?

21.4 EL CAMPO ELÉCTRICO

La fuerza eléctrica ejercida por una carga sobre otra es un ejemplo de acción a distancia, semejante a la fuerza gravitatoria ejercida por una masa sobre otra. La idea de acción a distancia presenta un problema conceptual difícil. ¿Cuál es el mecanismo según el cual una partícula puede ejercer una fuerza sobre otra a través del espacio

vacío que existe entre las partículas? Supongamos que una partícula cargada situada en un punto determinado se mueve súbitamente. ¿Variaría instantáneamente la fuerza ejercida sobre otra partícula situada a la distancia r de la primera? Para evitar el problema de la acción a distancia se introduce el concepto de **campo eléctrico**. Una carga crea un campo eléctrico $\vec{E}$ en todo el espacio y este campo ejerce una fuerza sobre la otra carga. La fuerza es así ejercida por el campo $\vec{E}$ existente en la posición de la segunda carga, más que por la propia primera carga que se encuentra a cierta distancia. Los cambios del campo se propagan a través del espacio con la velocidad de la luz, c. Así, si una carga se mueve súbitamente, la fuerza que ejerce sobre otra carga a la distancia r no se modifica hasta que transcurre el tiempo r/c.

La figura 21.11*a* muestra una serie de cargas puntuales, q_1, q_2 y q_3, dispuestas arbitrariamente en el espacio. Estas cargas producen un campo eléctrico $\vec{E}$ en cualquier punto del espacio. Si situamos una pequeña carga testigo q_0 en algún punto próximo, ésta experimentará la acción de una fuerza debido a las otras cargas. La fuerza resultante ejercida sobre q_0 es la suma vectorial de las fuerzas individuales ejercidas sobre q_0 por cada una de las otras cargas del sistema. Como cada una de estas fuerzas es proporcional a q_0, la fuerza neta será proporcional a q_0. El campo eléctrico $\vec{E}$ en un punto se define por esta fuerza dividida por q_0:*

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \qquad (q_0 \text{ pequeña}) \qquad 21.5$$

DEFINICIÓN: CAMPO ELÉCTRICO

La unidad del SI del campo eléctrico es el newton por coulomb (N/C). Además, la carga testigo q_0 ejercerá una fuerza sobre cada una de las otras cargas (figura 21.1*b*), produciéndoles movimiento; por ello, se debe considerar la carga q_0 tan pequeña como para que las fuerzas ejercidas sobre las otras cargas sean despreciables. De esta forma, el campo eléctrico en el lugar donde se coloca la carga q_0 se define mediante la ecuación 21.5 en el límite en el que la carga q_0 tiende a cero. En la tabla 21.2 se presentan las magnitudes de algunos de los campos eléctricos que encontramos en la naturaleza.

El campo eléctrico es un vector que describe la condición en el espacio creada por el sistema de cargas puntuales. Desplazando la carga testigo q_0 de un punto a otro, podemos determinar $\vec{E}$ en todos los puntos del espacio (excepto el ocupado por una carga q). El campo eléctrico $\vec{E}$ es, por lo tanto, una función vectorial de la posición. La fuerza ejercida sobre una carga testigo q_0 en cualquier punto está relacionada con el campo eléctrico en dicho punto por

$$\vec{F} = q_0\vec{E} \qquad 21.6$$

PROBLEMA PRÁCTICO 21.7

Cuando se coloca una carga testigo de 5 nC en un punto determinado, sufre la acción de una fuerza de 2×10^{-4} N en la dirección creciente de x. ¿Cuál es el campo eléctrico $\vec{E}$ en dicho punto?

PROBLEMA PRÁCTICO 21.8

¿Cuál es la fuerza que actúa sobre un electrón situado en el punto donde el campo eléctrico es $\vec{E} = (4{,}0 \times 10^4\ \text{N/C})\hat{i}$?

El campo eléctrico debido a una sola carga puntual q_i en la posición r_i puede calcularse a partir de la ley de Coulomb. Si situamos una pequeña carga testigo positiva q_0 en algún punto P a la distancia r_{iP} de la carga q_i, la fuerza que actúa sobre ella es

$$\vec{F}_{i0} = \frac{kq_iq_0}{r_{iP}^2}\hat{r}_{iP}$$

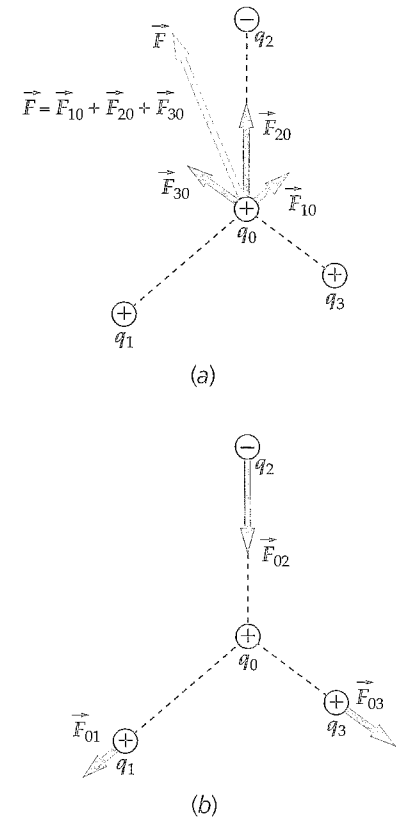


FIGURA 21.11 (*a*) Una pequeña carga testigo (o de prueba) q_0 en las proximidades de un sistema de cargas q_1, q_2, q_3,... experimenta una fuerza $\vec{F}$ proporcional a q_0. La relación $\vec{F}/q_0$ es el campo eléctrico en esa posición. (*b*) La carga testigo q_0 ejerce también una fuerza sobre cada una de las otras cargas que le rodean y cada una de estas fuerzas es proporcional a q_0.

Tabla 21.2

	E, N/C
En los cables domésticos	10^{-2}
En las ondas de la radio	10^{-1}
En la atmósfera	10^{2}
En la luz solar	10^{3}
Bajo una nube tormentosa	10^{4}
En la descarga de un relámpago	10^{4}
En un tubo de rayos X	10^{6}
En el electrón de un átomo de hidrógeno	5×10^{11}
En la superficie de un núcleo de uranio	2×10^{21}

* Esta definición es semejante a la del campo gravitatorio terrestre, formulada en la sección 4.3 como la fuerza por unidad de masa ejercida por la Tierra sobre un cuerpo.

El campo eléctrico en el punto P debido a la carga q_i (figura 21.12) es, por lo tanto,

$$\vec{E}_{iP} = \frac{kq_i}{r_{iP}^2}\hat{r}_{iP} \qquad 21.7$$

LEY DE COULOMB PARA EL CAMPO $\vec{E}$

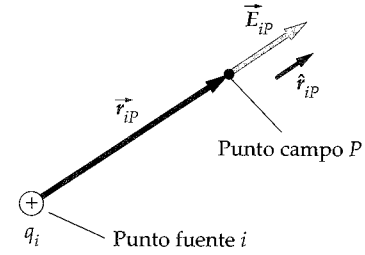


FIGURA 21.12 El campo eléctrico $\vec{E}$ en un punto P debido a la carga q_i colocada en un punto i.

donde $\hat{r}_{iP}$ es un vector unitario que apunta desde el **punto fuente** i al punto de observación del campo o **punto campo** P.

El campo eléctrico resultante debido a una distribución de cargas puntuales se determina sumando los campos originados por cada carga separadamente:

$$\vec{E}_P = \sum_i \vec{E}_{iP} \qquad 21.8$$

CAMPO ELÉCTRICO $\vec{E}$ DEBIDO A UN SISTEMA DE CARGAS PUNTUALES

Esto implica que el campo eléctrico satisface el principio de superposición.

Aunque la expresión del campo eléctrico (ecuación 21.7) depende de la localización del punto P, el campo no depende, sin embargo, de la carga testigo q_0; por ello, su valor no aparece en la ecuación 21.7.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Cálculo del campo eléctrico resultante

PLANTEAMIENTO Para calcular el campo eléctrico resultante $\vec{E}_P$ en un punto P generado por una distribución de cargas puntuales, se debe dibujar, en primer lugar, la configuración de las cargas. En el esquema hay que incluir los ejes de coordenadas y un punto arbitrario donde se desea calcular el campo.

SOLUCIÓN

1. Definir r_{iP} como el vector que tiene su origen en cualquier carga i y su final en el punto P, y $\vec{E}_{iP}$ como el vector del campo eléctrico generado por la carga i en el punto P.
2. Si el punto P y todas las cargas puntuales no están alineados, se deben fijar los ángulos que cada vector $\vec{E}_{iP}$ forma con los tres ejes.
3. Determinar las tres componentes de cada vector campo $\vec{E}_{iP}$ en los ejes y calcular las componentes del campo eléctrico resultante $\vec{E}_P$.

Dirección del campo eléctrico — *Conceptual*

Se coloca una carga positiva $q_1 = +q$ en un punto del eje $x = a$, y otra $q_2 = -2q$ en $x = -a$, tal como muestra la figura 21.13. Dividimos el eje x en tres intervalos: región I ($x < -a$), región II ($-a < x < a$) y región III ($x > a$) ¿Existe algún punto en estas regiones donde el campo eléctrico sea igual a cero? ¿En qué regiones?

PLANTEAMIENTO Sean $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ los campos eléctricos generados por q_1 y q_2, respectivamente. Como q_1 es positiva, $\vec{E}_1$ apuntará en el sentido de alejamiento de la carga y, como q_2 es negativa, $\vec{E}_2$ apuntará hacia la correspondiente carga q_2. El campo eléctrico resultante $\vec{E}$ es la suma vectorial de ambos campos ($\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$). Por lo tanto, es igual a cero si los campos de cada una de las cargas son iguales en módulo y tienen sentidos opuestos. Por otro lado, según nos vamos aproximando a dichas cargas, sus respectivos campos tienden a infinito. Además, en puntos muy alejados de ambas cargas, siempre sobre el eje x, el campo resultante se aproxima al ejercido por la carga suma de ambas, $q_1 + q_2$, localizada en el punto medio de ambas cargas, siendo un campo debido a una carga negativa, puesto que $q_1 + q_2$ tiene carga resultante negativa.

SOLUCIÓN

1. En la figura 21.13 se representa la configuración de cargas del problema, mostrando las dos cargas sobre el eje x, y el campo eléctrico, dibujado en forma esquemática, debido a cada una de las cargas en cada una de las regiones I, II y III, denominando los respectivos puntos campo arbitrarios de estas regiones como P_I, P_{II} y P_{III}.

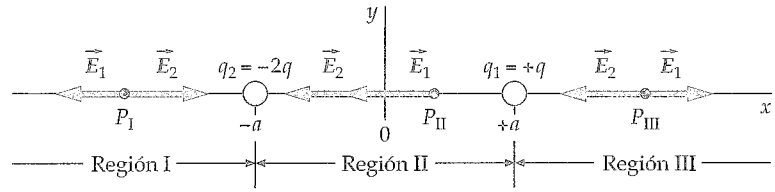


FIGURA 21.13

2. Analizar en qué puntos, de la región I, los campos son iguales en módulo y tienen sentidos opuestos:

En todos los puntos de la región I, los dos campos eléctricos tienen sentidos opuestos, y el módulo E_2 es mayor que E_1 por dos razones: porque cualquier punto de la región I está más cerca de q_2 que de q_1 y, además, el valor absoluto de q_2 es doble que el de q_1. En consecuencia, en esta región el campo eléctrico resultante no es cero en ninguno de sus puntos.

3. Analizar en qué puntos, de la región II, los campos son iguales en módulo y tienen sentidos opuestos:

En la región II, los dos campos tienen el mismo sentido y, por lo tanto, en ningún punto se puede anular la suma de ambos vectores.

4. Analizar en qué puntos, de la región III, los campos son iguales en módulo y tienen sentidos opuestos:

En la región III, los dos campos tiene sentidos opuestos y, en puntos cercanos a $x = a$, E_1 es mayor que E_2 porque en estos puntos próximos a q_1, E_1 tiende a infinito. Por el contrario, en puntos alejados, donde $x >> a$, E_2 es mayor que E_1 porque a grandes distancias de las dos cargas, el sentido del campo viene determinado por el que crea la carga suma de ambas $q_1 + q_2$. Por consiguiente, habrá algún punto de dicha región en donde el campo resultante es igual a cero, puesto que el módulo de E_1 será en él igual al de E_2 y sus sentidos serán opuestos, por lo que se anularán.

COMPROBACIÓN El campo eléctrico resultante se anula en un punto de la región III. Esta anulación se produce porque la carga q_2 es mayor en módulo, está más alejada de todos los puntos de esta región que la q_1, y porque las dos cargas son de signo contrario. El resultado coincide con lo esperado.

Ejemplo 21.7 Campo eléctrico debido a dos cargas positivas en la recta que las une

Una carga positiva $q_1 = +8$ nC se encuentra en el origen y una segunda carga positiva $q_2 = +12$ nC está sobre el eje x a la distancia $a = 3$ m. Determinar el campo eléctrico resultante (*a*) en el punto A sobre el eje x en $x = 6$ m y (*b*) en el punto B sobre el eje x en $x = 2$ m.

PLANTEAMIENTO Sean $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ los campos creados por q_1 y q_2, respectivamente. El sentido del campo $\vec{E}_1$ se aleja de q_1 y el sentido del campo $\vec{E}_2$ se aleja de q_2, por ser ambas cargas positivas. El problema trata de determinar el campo resultante en todos los puntos del eje x, mediante la suma vectorial de $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. La configuración de las cargas viene dada en la figura 21.14. Se dibujan los campos debidos a cada una de las cargas en los puntos A y B:

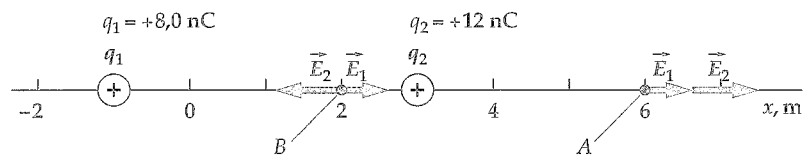


FIGURA 21.14 Como q_1 y q_2 son cargas positivas, $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ apuntan en el sentido de alejamiento de las respectivas cargas tanto en A como en B.

2. Calcular $\vec{E}$ en el punto A, utilizando $r_{1A} = |x_A - x_1| = 6{,}0\text{ m} - (-1{,}0\text{ m}) = 7{,}0$ m y $r_{2A} = |x_A - x_2| = 6{,}0\text{ m} - (3{,}0\text{ m}) = 3{,}0$ m:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{kq_1}{r_{1A}^2}\hat{r}_{1A} + \frac{kq_2}{r_{2A}^2}\hat{r}_{2A} = \frac{kq_1}{(x_A - x_1)^2}\hat{\imath} + \frac{kq_2}{(x_A - x_2)^2}\hat{\imath}$$

$$= \frac{(8{,}99 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(8{,}0 \times 10^{-9}\ \text{C})}{(7{,}0\ \text{m})^2}\hat{\imath} + \frac{(8{,}99 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(12 \times 10^{-9}\ \text{C})}{(3{,}0\ \text{m})^2}\hat{\imath}$$

$$= (1{,}47\ \text{N/C})\hat{\imath} + (12{,}0\ \text{N/C})\hat{\imath} = \boxed{(13\ \text{N/C})\hat{\imath}}$$

(*b*) Calcular $\vec{E}$ en el punto *B*, donde $r_{1B} = |x_B - x_1| = 2{,}0\text{ m} - (-1{,}0\text{ m}) = 3{,}0\text{ m}$ y $r_{2B} = |x_B - x_2| = |2{,}0\text{ m} - (3{,}0\text{ m})| = 1{,}0\text{ m}$:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{kq_1}{r_{1B}^2}\hat{r}_{1B} + \frac{kq_2}{r_{2B}^2}\hat{r}_{2B} = \frac{kq_1}{(x_B - x_1)^2}\hat{\imath} + \frac{kq_2}{(x_B - x_2)^2}(-\hat{\imath})$$

$$= \frac{(8{,}99 \times 10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(8{,}0 \times 10^{-9}\text{ C})}{(3{,}0\text{ m})^2}\hat{\imath} - \frac{(8{,}99 \times 10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(12 \times 10^{-9}\text{ C})}{(1{,}0\text{ m})^2}\hat{\imath}$$

$$= (7{,}99\text{ N/C})\hat{\imath} - (108\text{ N/C})\hat{\imath} = \boxed{-(100\text{ N/C})\hat{\imath}}$$

COMPROBACIÓN El campo en la parte (*b*) es grande en la dirección de las *x* negativas. Esto es así porque el punto *B* está más cercano de la carga q_2 que de la q_1, siendo q_2 (12 nC) la mayor de las dos.

OBSERVACIÓN El campo eléctrico $\vec{E}_1$ predomina en el campo resultante en los puntos cercanos a $q_1 = 8$ nC. Existe un punto entre q_1 y q_2 en el que el campo total es cero. Una carga testigo puesta en ese punto no experimentaría fuerza alguna. En la figura 21.15, se representa E_x, que es el módulo de campo resultante en el eje *x*, en función de esta coordenada.

PROBLEMA PRÁCTICO 21.9 A partir de los datos del ejemplo 21.7, localizar el punto del eje *x* donde el campo eléctrico es igual a cero.

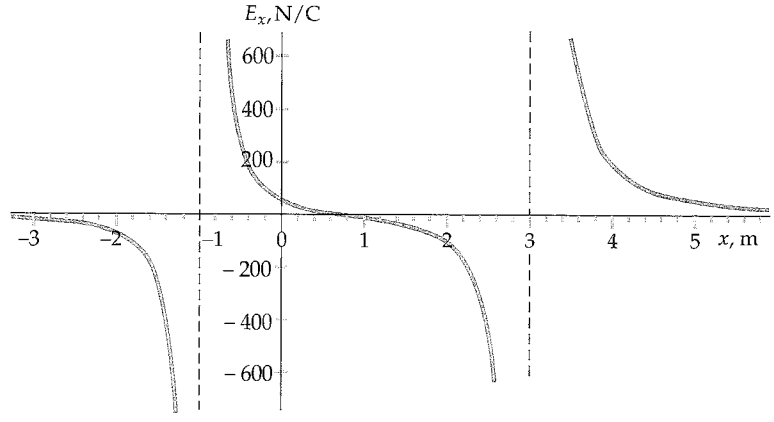


FIGURA 21.15

Ejemplo 21.8 Campo eléctrico en puntos del eje *y* debido a cargas puntuales colocadas en el eje *x*

Inténtelo usted mismo

Una carga puntual $q_1 = +8{,}0$ nC está situada en el origen y una segunda carga $q_2 = +12{,}0$ nC en $x = 4{,}0$ m. Determinar el campo eléctrico en $y = 3{,}0$ m.

PLANTEAMIENTO Como en el ejemplo 21.7, $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. El campo eléctrico $\vec{E}_1$ en puntos del eje *y* debido a la carga q_1 tiene la propia dirección de dicho eje, y el $\vec{E}_2$ debido a q_2 se encuentra en el segundo cuadrante del plano. Para determinar el vector campo $\vec{E}$, lo haremos calculando primero por separado sus componentes *x* e *y*.

SOLUCIÓN

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo.

Pasos

1. En la figura 21.16*a*, están colocadas las cargas en el sistema de coordenadas y se propone un punto arbitrario del eje donde se dibuja el campo debido a cada una de las cargas; se indican las distancias y ángulos de forma apropiada.

Respuestas

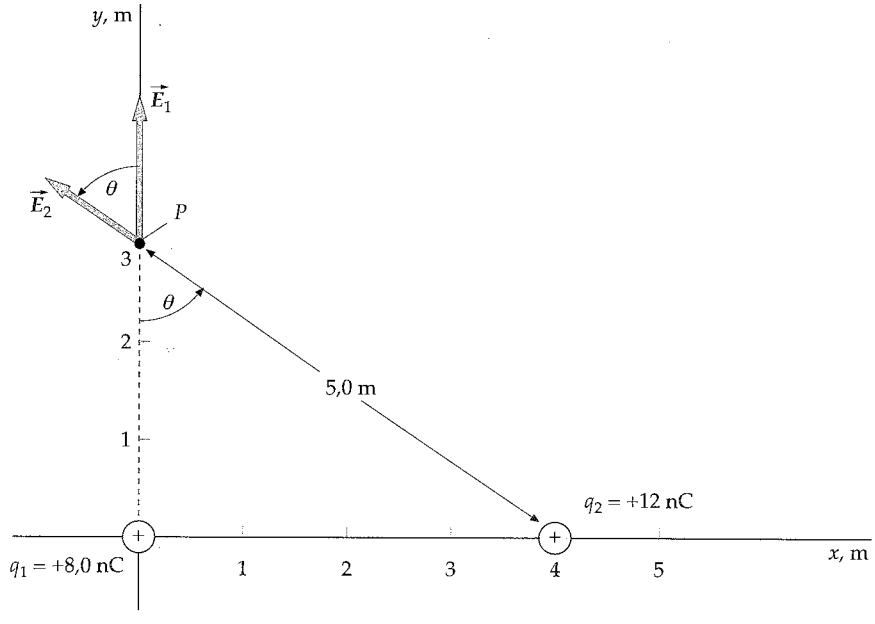


FIGURA 21.16*a*

2. Calcular el módulo del campo $\vec{E}_1$ debido a q_1 en el punto (0, 3,0 m). Hallar las componentes sobre los ejes x e y de este campo.

$E_1 = kq_1/y^2 = 7{,}99$ N/C
$E_{1x} = 0$, $E_{1y} = E_1 = 7{,}99$ N/C

3. Calcular el módulo del campo $\vec{E}_2$ debido a q_2.

$E_2 = 4{,}32$ N/C

4. Expresar las componentes x e y de $\vec{E}_2$ en función del ángulo θ.

$E_{2x} = -E_2 \operatorname{sen}\theta$; $E_{2y} = E_2 \cos\theta$

5. Calcular sen θ y cos θ.

$\operatorname{sen}\theta = 0{,}80$; $\cos\theta = 0{,}60$

6. Calcular E_{2x} y E_{2y}.

$E_{2x} = -3{,}46$ N/C; $E_{2y} = 2{,}59$ N/C

7. En la figura 21.16*b*, se dibujan las componentes del campo resultante, incluyendo el vector $\vec{E}$ y el ángulo que forma este vector con el eje x.

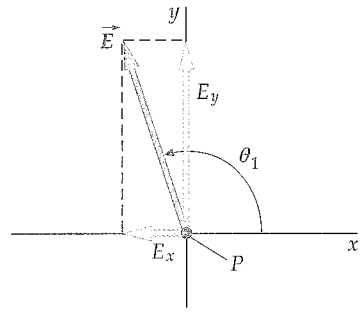


FIGURA 21.16*b*

8. Determinar las componentes x e y del campo resultante $\vec{E}$.

$E_x = E_{1x} + E_{2x} = -3{,}46$ N/C
$E_y = E_{1y} + E_{2y} = 10{,}6$ N/C

9. Calcular el módulo de $\vec{E}$ a partir de sus componentes.

$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 11{,}2 \text{ N/C} = \boxed{11 \text{ N/C}}$

10. Determinar el ángulo θ_1 formado por $\vec{E}$ con el eje x.

$\theta_1 = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{E_y}{E_x}\right) = \boxed{108°}$

COMPROBACIÓN Tal como era de esperar, el módulo de E es mayor que el de E_1 y el de E_2, pero menor que la suma de ambos. (Este resultado es lógico porque el ángulo entre $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ es diferente de cero.)

Ejemplo 21.9 Campo eléctrico debido a dos cargas del mismo módulo y signo contrario

Una carga $+q$ se encuentra en $x = a$ y una segunda carga $-q$ en $x = -a$ (figura 21.17). (*a*) Determinar el campo eléctrico sobre el eje x en un punto arbitrario $x > a$. (*b*) Determinar la forma límite del campo eléctrico para $x >> a$.

PLANTEAMIENTO Usando el principio de superposición, $\vec{E}_P = \vec{E}_{1P} + \vec{E}_{2P}$, calculamos el campo eléctrico en el punto P. Para $x > a$, el campo eléctrico $\vec{E}_+$ debido a la carga positiva tiene la dirección de las x positivas y el $\vec{E}_-$ debido a la carga negativa la de las x negativas. La distancia del punto P a la carga positiva es $x - a$, y a la carga negativa $x - (-a) = x + a$.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. La figura 21.17 muestra la distribución de las cargas y sus respectivas distancias al punto en el que se mide el campo:

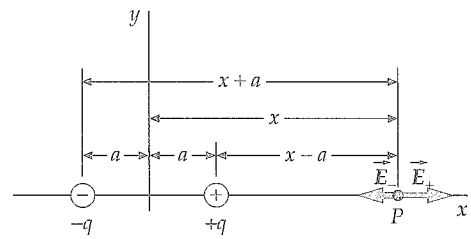


FIGURA 21.17

2. Calcular el campo $\vec{E}$ debido a las dos cargas para $x > a$: (*Observación*: la ecuación de la derecha es válida sólo para $x > a$.):

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{kq}{[x-a]^2}\hat{\imath} + \frac{kq}{[x-(-a)]^2}\left(-\hat{\imath}\right) = kq\left[\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x+a)^2}\right]\hat{\imath}$$

3. Poner los términos incluidos entre corchetes bajo un denominador común y simplificar:

$$\vec{E} = kq\left[\frac{(x+a)^2-(x-a)^2}{(x+a)^2(x-a)^2}\right]\hat{\imath} = \boxed{kq\frac{4ax}{(x^2-a^2)^2}\hat{\imath} \qquad x > a}$$

(*b*) En el límite $x >> a$, podemos despreciar a^2 comparado con x^2, y simplificar así el denominador:

$$\vec{E} = kq\frac{4ax}{(x^2-a^2)^2}\hat{\imath} \approx kq\frac{4ax}{x^4}\hat{\imath} = \boxed{\frac{4kqa}{x^3}\hat{\imath} \qquad x \gg a}$$

COMPROBACIÓN Los dos resultados de los recuadros tienden a cero cuando x tiende a infinito, tal como era de esperar.

OBSERVACIÓN La figura 21.18 muestra E_x en función de x para todo valor de x, para q = 1 nC y a = 1 cm. Lejos de las cargas, el campo viene dado por

$$\vec{E} = \frac{4kqa}{|x|^3}\hat{\imath} \qquad |x| \gg a$$

Entre las cargas, la contribución de cada una de ellas se verifica en la dirección negativa. Una expresión válida para todo valor de x es

$$\vec{E} = \frac{kq}{(x-a)^2}\hat{e}_+ + \frac{k(-q)}{(x+a)^2}\hat{e}_- \qquad -a < x < a$$

donde el vector unitario $\hat{e}_+$ tiene el sentido de las x positivas para x mayor o igual que a, y el vector $\hat{e}_-$ el de las x negativas para x menor que $-a$. (Todo ello con la excepción de $x = -a$.) (Obsérvese que $\hat{e}_+ = \frac{x-a}{|x-a|}\hat{\imath}$ y $\hat{e}_- = \frac{x+a}{|x+a|}\hat{\imath}$.)

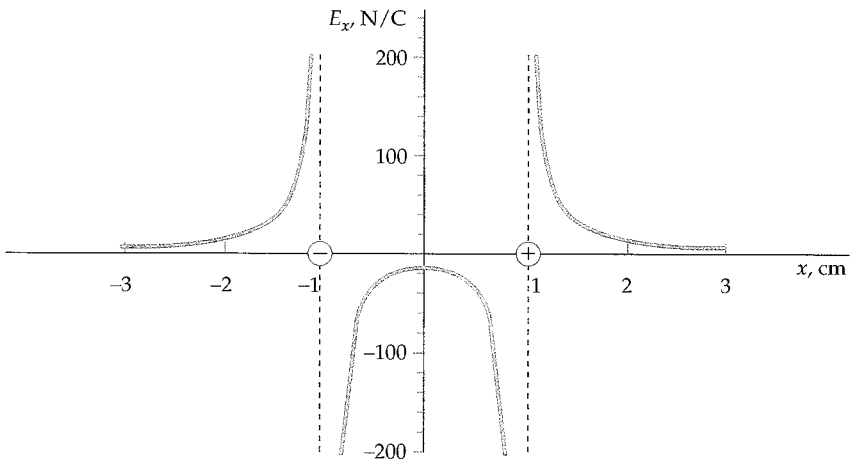


FIGURA 21.18 Gráfica de E_x versus x para la distribución de carga del ejemplo 21.9.

DIPOLOS ELÉCTRICOS

Un sistema de dos cargas iguales y opuestas q separadas por una pequeña distancia L se denomina **dipolo eléctrico**. Su intensidad y su orientación se describen mediante el **momento dipolar eléctrico** $\vec{p}$, un vector que apunta de la carga negativa a la positiva y cuyo módulo es el producto $q\vec{L}$ (figura 21.19):

$$\vec{p} = q\vec{L} \qquad 21.9$$

DEFINICIÓN: MOMENTO DIPOLAR ELÉCTRICO

donde $\vec{L}$ es un vector cuyo origen está en la carga negativa y su extremo en la carga positiva.

Para la configuración de la figura 21.17, $\vec{L} = 2a\hat{\imath}$ y el momento dipolar eléctrico es

$$\vec{p} = 2aq\hat{\imath}$$

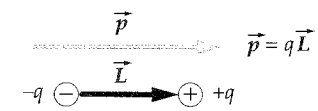


FIGURA 21.19 Un dipolo eléctrico consiste en dos cargas iguales y opuestas separadas por una pequeña distancia L. El módulo del momento dipolar es $\vec{p} = q\vec{L}$, donde q es el valor absoluto de una de las cargas y $\vec{L}$ es el módulo del vector posición de la carga positiva respecto de la negativa.

En función del momento dipolar $\vec{p}$, el campo eléctrico sobre el eje del dipolo en un punto a gran distancia $|x|$ posee la dirección y sentido del momento dipolar y su magnitud es

$$E = \frac{2kp}{|x|^3} \qquad 21.10$$

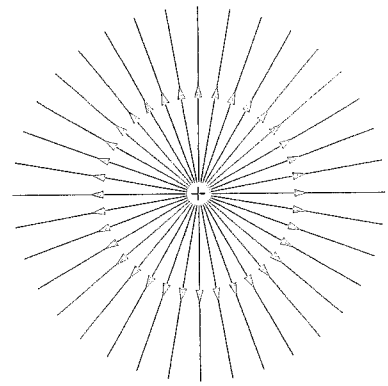
(Véase el ejemplo 21.9). En un punto alejado de un dipolo en cualquier dirección, el módulo del campo eléctrico es proporcional al momento dipolar y decrece con el cubo de la distancia. Cuando un sistema tiene una carga neta distinta de cero, el campo eléctrico disminuye según $1/r^2$ a grandes distancias. En un sistema con carga neta nula, el campo eléctrico disminuye con mayor rapidez con la distancia. En el caso de un dipolo eléctrico, el campo disminuye según $1/r^3$ en todas las direcciones.

21.5 LÍNEAS DE CAMPO ELÉCTRICO

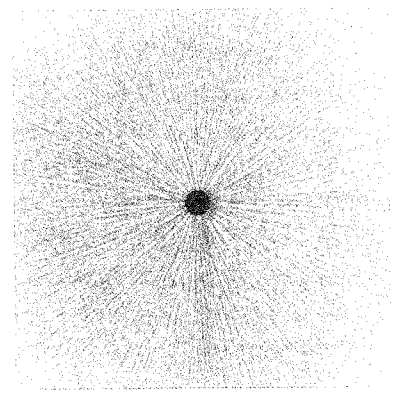
El campo eléctrico puede representarse dibujando líneas que indiquen su dirección. En cualquier punto, el vector campo $\vec{E}$ es tangente a las líneas de campo eléctrico, que se llaman también **líneas de fuerza** porque muestran la dirección de la fuerza ejercida sobre una carga testigo positiva. En cualquier punto próximo a una carga positiva, el campo eléctrico apunta radialmente alejándose de la carga; por lo tanto, cerca de una carga positiva las líneas de campo eléctrico también apuntan alejándose de ésta. Igualmente, las líneas del campo eléctrico convergen hacia un punto ocupado por una carga negativa.

La figura 21.20 muestra las líneas de campo eléctrico de una sola carga puntual positiva. El espaciado de las líneas está relacionado con la intensidad del campo eléctrico. A medida que nos alejamos de la carga, el campo eléctrico se debilita y las líneas se separan. Consideremos una superficie esférica de radio r con su centro en la carga. Su área es $4\pi r^2$. Así, cuando r crece, la densidad de las líneas de campo (el número de líneas por unidad de superficie) decrece según $1/r^2$, es decir, del mismo modo que decrece E. Por lo tanto, si adoptamos el convenio de dibujar un número fijo de líneas desde una carga puntual, siendo proporcional dicho número a la carga q, y si dibujamos las líneas simétricamente alrededor de la carga puntual, la intensidad del campo vendrá indicada por la densidad de las líneas. Cuanto más próximas se encuentran las líneas, más intenso es el **campo eléctrico**.

La figura 21.21 muestra las líneas de fuerza para dos cargas puntuales positivas iguales, q, separadas por una distancia pequeña. En un punto próximo a una de las cargas, el campo es debido prácticamente sólo a esta carga, pues la otra está tan alejada que podemos despreciar su contribución al campo. En consecuencia, las líneas de campo próximas a una cualquiera de las cargas son radiales e igualmente espa-

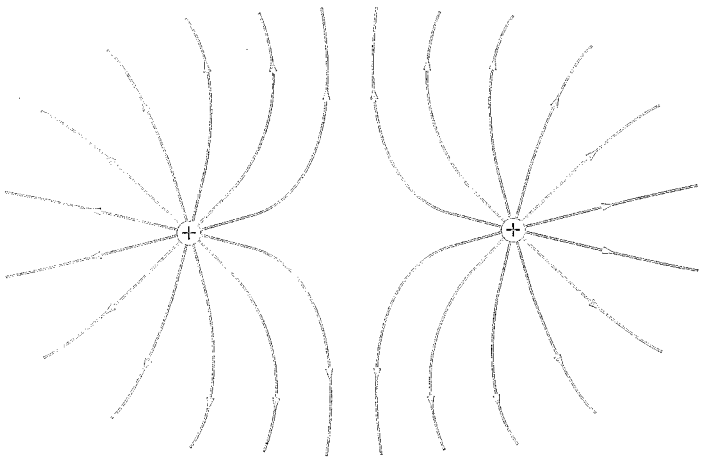


(a)

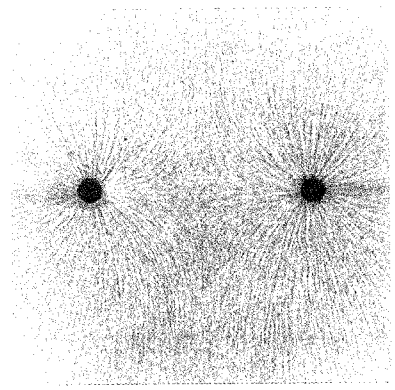


(b)

FIGURA 21.20 (*a*) Líneas de campo eléctrico o líneas de fuerza de una sola carga puntual positiva. Si la carga fuera negativa, las flechas invertirían su dirección. (*b*) Las mismas líneas de campo eléctrico puestas de manifiesto por hebras de hilo suspendidas en aceite. El campo eléctrico del objeto cargado en el centro induce cargas opuestas en los extremos de cada trocito de hilo, haciendo que se alineen por sí mismos paralelamente al campo. *(Harold M. Waage.)*



(a)



(b)

FIGURA 21.21 (*a*) Líneas de campo eléctrico correspondientes a dos cargas puntuales positivas. Las flechas se invertirían si ambas cargas fueran negativas. (*b*) Las líneas del mismo campo eléctrico puestas de manifiesto con hebras de hilo suspendidas en aceite. *(Harold M. Waage.)*

ciadas. Puesto que las cargas son iguales, dibujaremos un número igual de líneas saliendo de cada una de ellas. A una distancia muy grande de las cargas, los detalles del sistema carecen de importancia y el sistema se comporta como una carga puntual de magnitud $2q$. (Por ejemplo, si las dos cargas estuvieran separadas 1 mm y las observásemos desde un punto situado a 100 km, parecerían una carga única.) Así, lejos de las cargas, el campo es aproximadamente igual que el generado por una carga puntual de magnitud $2q$ y las líneas están igualmente espaciadas, aproximadamente. Observando la figura 21.21 podemos deducir que el campo eléctrico que existe en el espacio entre las dos cargas es más débil, ya que el número de líneas en esta región es muy inferior al número de líneas que existe a la derecha o a la izquierda de las cargas, en donde las líneas están más juntas. Por supuesto, esta información también puede obtenerse mediante el cálculo directo del campo en los puntos de estas regiones.

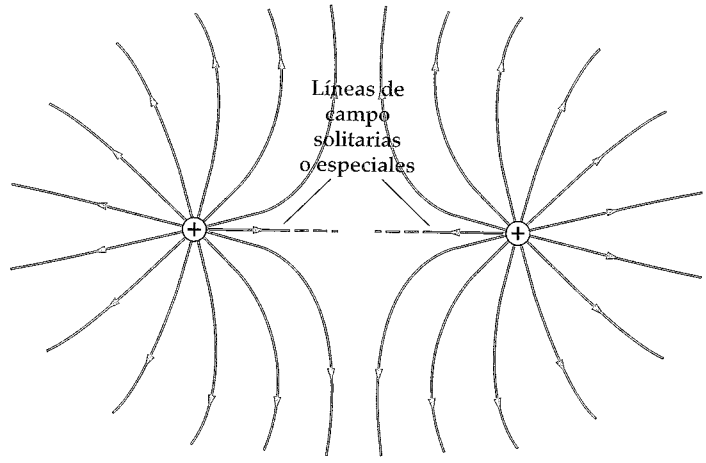


FIGURA 21.22 Existen infinitas líneas de campo que salen de las dos cargas, dos de las cuales son líneas especiales que denominamos líneas de campo solitarias. Estas dos líneas deberían terminar en el punto medio de separación entre las dos cargas, donde, al anularse el campo, las líneas de campo desaparecen.

El razonamiento utilizado en los ejemplos precedentes puede aplicarse para dibujar las líneas de fuerza de cualquier sistema de cargas puntuales. En un lugar próximo a cada una de las cargas, las líneas del campo poseen la misma separación y según el signo de la carga entran en ella o salen radialmente. Lejos de todas las cargas, los detalles de la estructura del sistema no son importantes, y las líneas del campo son las mismas que las correspondientes a una única carga puntual igual a la carga neta del sistema. Resumimos a continuación las reglas para dibujar las líneas de campo eléctrico.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

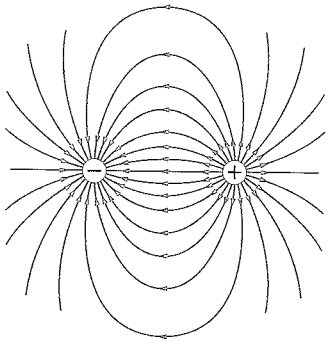
Dibujar líneas de campo

PLANTEAMIENTO Las líneas de campo eléctrico comienzan en las cargas positivas (o en el infinito) y terminan en las negativas (o en el infinito).*

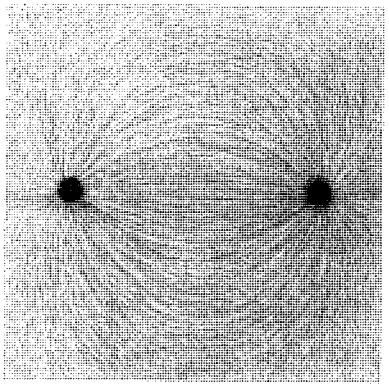
SOLUCIÓN

1. Las líneas se dibujan uniformemente espaciadas, y saliendo o entrando en la carga.
2. El número de líneas que abandonan una carga positiva o entran en una carga negativa es proporcional al módulo de la carga.
3. La densidad de líneas (número de ellas por unidad de área perpendicular a las mismas) en un punto es proporcional al valor del módulo del campo en dicho punto.
4. A grandes distancias de un sistema de cargas, las líneas de campo están igualmente espaciadas y son radiales, como si procediesen de una sola carga puntual igual a la carga neta del sistema.

COMPROBACIÓN No pueden cortarse nunca dos líneas de campo. (Si dos líneas de campo se cruzaran, ésto indicaría dos direcciones para $\vec{E}$ en el punto de intersección, lo cual es imposible.)



(*a*)



(*b*)

FIGURA 21.23 (*a*) Líneas de campo en un dipolo eléctrico. (*b*) Las mismas líneas puestas de manifiesto con hebras de hilo en aceite. (*Harold M. Waage.*)

En la figura 21.23, se muestran las líneas de campo eléctrico para un dipolo eléctrico. Muy cerca de la carga positiva, las líneas son radiales y dirigidas hacia fuera. Muy cerca de la carga negativa, las líneas son radiales y dirigidas hacia dentro.

* Definimos líneas de campo solitarias como aquellas que no siguen la regla general, ya que salen de cualquiera de las cargas positivas, tal como se representa en la figura 21.22, y aunque se dirigen a la otra carga acaban en el punto medio de la distancia entre las dos cargas en donde el campo total es nulo. Entre estas dos cargas positivas existen infinitas líneas de campo, dos de las cuales son líneas solitarias.

Puesto que las cargas tienen el mismo valor, el número de líneas que empiezan en la carga positiva es igual al número de las que terminan en la carga negativa. En este caso, el campo es más intenso en la región entre las cargas, como indica el hecho de que la densidad de líneas del campo en esta región sea muy elevada.

La figura 21.24*a* muestra las líneas de campo eléctrico para una carga negativa $-q$ situada a una distancia pequeña de otra positiva $+2q$. De la carga positiva salen el doble de líneas de las que entran en la carga negativa. Es decir, la mitad de las líneas que comienzan en la carga positiva $+2q$ entran en la carga negativa $-q$ y la otra mitad abandonan el sistema. Muy lejos de las cargas (figura 21.24*b*), las líneas que abandonan el sistema están espaciadas prácticamente de forma simétrica y apuntan radialmente hacia fuera, como si se tratara de una sola carga puntual positiva $+q$.

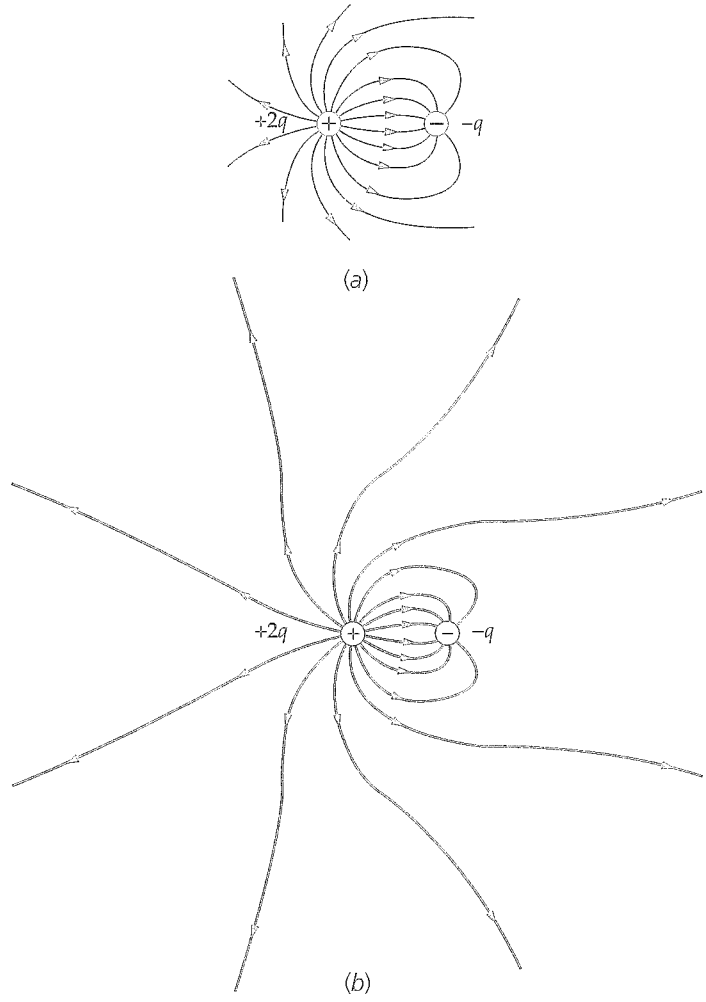


FIGURA 21.24 (*a*) Líneas de campo eléctrico correspondientes a una carga puntual $+2q$ y otra segunda carga puntual $-q$. (*b*) A grandes distancias de las cargas, las líneas son similares a las que se obtienen con una sola carga $+q$ localizada en el centro del sistema de cargas.

Líneas de campo eléctrico para dos esferas conductoras

Conceptual

En la figura 21.25 se muestran las líneas de campo correspondientes a dos esferas conductoras. ¿Cuál es el signo y el valor relativo de las cargas sobre las dos esferas?

PLANTEAMIENTO La carga sobre una esfera es positiva si salen más líneas que entran, y negativa si entran más líneas que salen. La relación de los módulos de las cargas es igual a la relación del número neto de líneas que entran o salen.

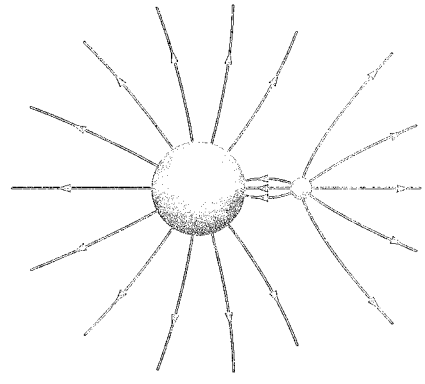


FIGURA 21.25

SOLUCIÓN

1. Contar el número de líneas que salen de la esfera grande: Como 11 líneas de campo eléctrico salen de la esfera grande de la izquierda y 3 entran, el número neto de líneas que salen es 8.

2. Contar el número de líneas que salen de la esfera pequeña: De la esfera pequeña salen 8 líneas de campo eléctrico y ninguna línea acaba en ella; en consecuencia, las líneas totales que salen de esta esfera son 8.

3. Determinar el signo de la carga de cada esfera: Dado que de ambas esferas salen más líneas de campo eléctrico de las que entran, **ambas esferas están cargadas positivamente.**

4. Determinar los valores absolutos de las cargas de las dos esferas: Dado que de ambas esferas sale el mismo número total de líneas de campo eléctrico, **los valores absolutos de las cargas de las dos esferas son iguales.**

La relación establecida entre la intensidad del campo eléctrico y las líneas de campo eléctrico es válida porque el campo varía en razón inversa con el cuadrado de la distancia a una carga puntual. Como el campo gravitatorio de una masa puntual también varía inversamente con el cuadrado de la distancia, el concepto de líneas de fuerza también es útil para dibujar el campo gravitatorio. Cerca de una masa puntual, las líneas de campo gravitatorio convergen hacia la masa, del mismo modo que las líneas de campo eléctrico convergen hacia una carga negativa. Sin embargo, no hay puntos en el espacio en donde las líneas del campo gravitatorio diverjan como lo hacen las líneas de campo eléctrico cerca de una carga positiva, pues la fuerza gravitatoria es siempre atractiva y nunca repulsiva.

21.6 ACCIÓN DEL CAMPO ELÉCTRICO SOBRE LAS CARGAS

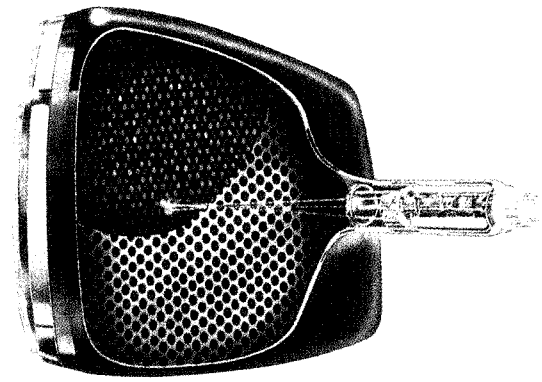
Un campo eléctrico uniforme puede ejercer una fuerza sobre una partícula cargada y también puede ejercer una fuerza y un momento de ésta sobre un dipolo eléctrico.

MOVIMIENTO DE CARGAS PUNTUALES EN CAMPOS ELÉCTRICOS

Cuando una partícula con carga q se coloca en un campo eléctrico $\vec{E}$, experimenta la acción de una fuerza $q\vec{E}$. Si la fuerza eléctrica es la única fuerza significativa que actúa sobre la partícula, ésta adquiere una aceleración

$$\vec{a} = \frac{\Sigma\vec{F}}{m} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

siendo m la masa de la partícula. (Con frecuencia la velocidad de un electrón en un campo eléctrico es una fracción importante de la velocidad de la luz; en este caso, las leyes de Newton del movimiento deben sustituirse por la teoría especial de la relatividad de Einstein.) Si se conoce el campo eléctrico, la relación carga-masa de la partícula puede determinarse midiendo su aceleración. La desviación de los electrones en un campo eléctrico uniforme fue utilizada por J. J. Thomson en 1897 para demostrar la existencia de los electrones y para medir su relación carga/masa. El osciloscopio, el monitor del ordenador y el tubo de rayos catódicos de un televisor son ejemplos de aparatos basados en el movimiento de los electrones en campos eléctricos.



Dibujo esquemático de un tubo de rayos catódicos utilizado en la televisión de color. Los haces de electrones procedentes del cañón electrónico, a la derecha, activan sustancias fosforescentes sobre la pantalla de la izquierda, dando lugar a puntos brillantes cuyos colores dependen de la intensidad relativa de cada haz. Los campos eléctricos establecidos entre las placas deflectoras del cañón (o bien campos magnéticos creados por bobinas) desvían los haces. Éstos barren la pantalla siguiendo una línea horizontal, se desvían hacia abajo y barren otra línea. La pantalla entera es barrida cada 1/30 s. *(Gentileza de Hulon Forrester/Video Display Corporation, Tucker Georgia.)*

Ejemplo 21.11 Electrón moviéndose paralelamente a un campo eléctrico uniforme

Un electrón se proyecta en un campo eléctrico uniform $\vec{E} = (1000\ \text{N/C})\hat{i}$ con una velocidad inicial $\vec{v}_0 = (2{,}00 \times 10^6\ \text{m/s})\hat{i}$ en la dirección del campo (figura 21.26). ¿Qué distancia recorrerá el electrón antes de que momentáneamente quede en reposo?

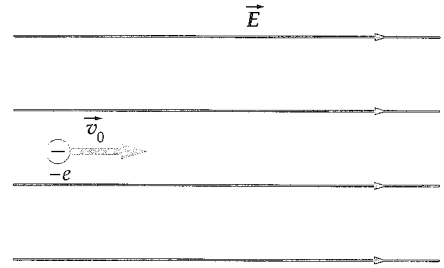


FIGURA 21.26

PLANTEAMIENTO Como la carga del electrón es negativa, la fuerza $\vec{F} = -e\vec{E}$ que actúa sobre él posee un sentido opuesto al del campo. Como $\vec{E}$ es constante, la fuerza también lo es y, por lo tanto, podemos utilizar las fórmulas del movimiento con aceleración constante del capítulo 2. Suponemos que el campo tiene la dirección positiva de x.

SOLUCIÓN

1. El desplazamiento Δx está relacionado con las velocidades inicial y final: $$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x\Delta x$$
2. La aceleración se obtiene de la segunda ley de Newton: $$a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{-eE_x}{m}$$
3. Cuando $v_x = 0$, el desplazamiento es: $$\Delta x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x} = \frac{0 - v_{0x}^2}{2(-eE_x/m)} = \frac{mv_0^2}{2eE} = \frac{(9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(2{,}00 \times 10^6\ \text{m/s})^2}{2(1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C})(1000\ \text{N/C})}$$ $$= 1{,}14 \times 10^{-2}\ \text{m} = \boxed{1{,}14\ \text{cm}}$$

COMPROBACIÓN EL desplazamiento Δx es positivo, tal como era de esperar para cualquier objeto moviéndose en la dirección positiva de las x.

Ejemplo 21.12 Electrón moviéndose perpendicularmente a un campo eléctrico uniforme

Un electrón se proyecta en el interior de un campo eléctrico uniform $\vec{E} = (-2{,}0\ \text{kN/C})\hat{j}$ con una velocidad inicial $\vec{v}_0 = (1{,}0 \times 10^6\ \text{m/s})\hat{i}$ en dirección perpendicular al campo (figura 21.27). (*a*) Comparar la fuerza gravitatoria que existe sobre el electrón con la fuerza eléctrica ejercida sobre él. (*b*) ¿Cuánto se habrá desviado el electrón si ha recorrido 1 cm en la dirección x?

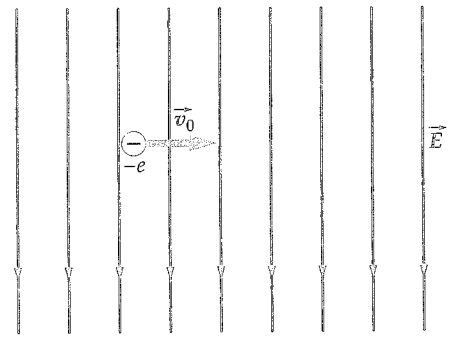


FIGURA 21.27

PLANTEAMIENTO (*a*) Calcular la relación entre la fuerza eléctrica $|q|E = eE$ y la fuerza gravitatoria mg. (*b*) Como mg es despreciable, la fuerza sobre el electrón es $-eE$ verticalmente hacia arriba. El electrón se mueve, por lo tanto, con velocidad horizontal constante v_x y se desvía hacia arriba una distancia $\Delta y = \frac{1}{2}at^2$, donde t es el tiempo invertido en recorrer 1 cm en la dirección x.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Calcular la relación entre el módulo de la fuerza eléctrica, F_e, y el módulo de la fuerza gravitatoria, F_g:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{eE}{mg} = \frac{(1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C})(2000\ \text{N/C})}{(9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(9{,}81\ \text{N/kg})} = \boxed{3{,}6 \times 10^{13}}$$

(*b*) 1. Expresar la desviación vertical en función de la aceleración a y el tiempo t:

$$\Delta y = \frac{1}{2}a_y t^2$$

2. El tiempo necesario para que el electrón se desplace una distancia x con velocidad horizontal constante v_0 es:

$$t = \frac{\Delta x}{v_0}$$

3. Para calcular Δy, usar $a_y = eE/m$, y el valor obtenido de t:

$$\Delta y = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}\left(\frac{\Delta x}{v_0}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})(2000\ \text{N/C})}{9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg}}\left(\frac{0{,}010\ \text{m}}{10^6\ \text{m/s}}\right)^2 = \boxed{1{,}8\ \text{cm}}$$

COMPROBACIÓN El resultado del paso 4 es positivo, hacia arriba, como era de esperar para un objeto acelerándose hacia arriba y que inicialmente se movía horizontalmente.

OBSERVACIÓN (*a*) Como es usual, la fuerza eléctrica es enorme comparada con la fuerza gravitatoria. Así, no es necesario considerar la gravedad al diseñar un tubo de rayos catódicos, por ejemplo, ni para calcular la desviación del electrón en el ejemplo anterior. De hecho, un tubo de imágenes de televisión funciona igualmente bien aunque esté invertido, como si la gravedad no existiera. (*b*) La trayectoria de un electrón que se mueve en un campo eléctrico uniforme es una parábola, análogamente a la trayectoria de una masa que se mueve en un campo gravitatorio uniforme.

Ejemplo 21.13 Campo eléctrico en una impresora de inyección de tinta

Póngalo en su contexto

Supongamos que acabamos de imprimir un extenso trabajo (para su profesor de inglés). Una pregunta que podría surgirnos de inmediato sería cuál es el mecanismo con el que la impresora coloca la tinta en el lugar apropiado. Realizamos una búsqueda en Internet y encontramos un esquema similar al de la figura 21.28. En dicho esquema, se muestra que las gotas de tinta se cargan y se hacen pasar por el campo eléctrico uniforme generado por dos placas de metal que tienen cargas de signos opuestos. Con los conocimientos estudiados en este tema, podríamos determinar cuál debe ser el campo eléctrico necesario entre las placas de este tipo de impresora. Prosiguiendo un poco más la búsqueda, encontramos que las gotas de tinta, de 40 micras de diámetro, tienen una velocidad inicial de 40 m/s, y que cuando una de ellas tiene una carga 2 nC se desvía 3 mm hacia arriba en un recorrido entre las placas de 1 cm. Determinar el campo eléctrico despreciando los efectos de la gravedad en el movimiento de las gotas.

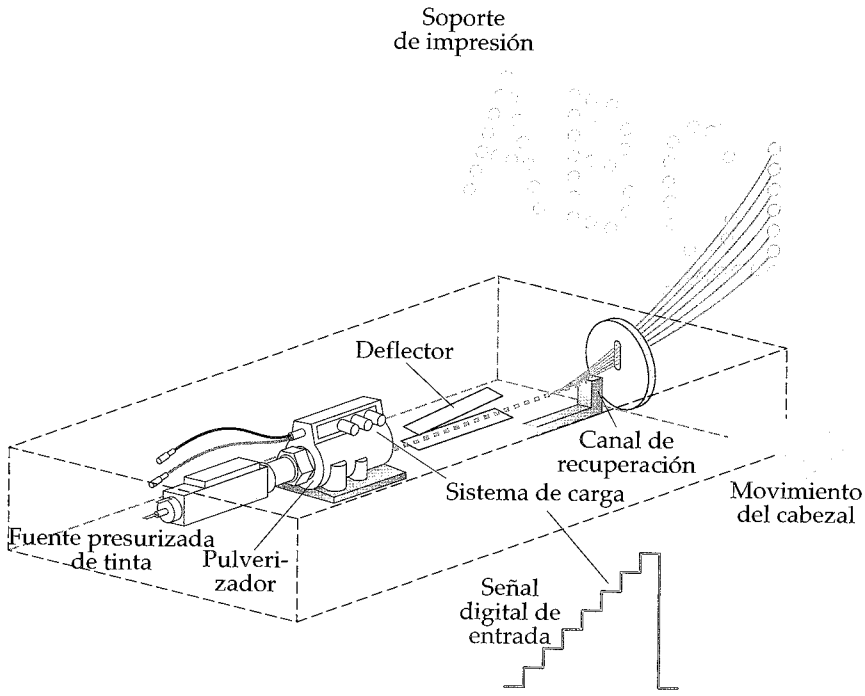


FIGURA 21.28 Impresora de inyección de tinta. La tinta sale del pulverizador en pequeñas gotas bien diferenciadas. A cada una de estas pequeñas gotas, que formarán un punto en la imagen, se le introduce una determinada cantidad de carga. Las placas con cargas opuestas constituyen el mecanismo para desviar las gotas. Cuanto mayor sea la carga adquirida por las gotas mayor será la desviación sufrida por las mismas al pasar entre las placas. Las gotas que no se desvían hacia arriba por no haber adquirido carga se drenan, retornando al depósito de tinta. *(Gentileza de Videojet Systems International.)*

PLANTEAMIENTO El campo eléctrico $\vec{E}$ entre las placas ejerce sobre la gota de tinta una fuerza eléctrica constante $\vec{F}$ siendo $\vec{F} = q\vec{E}$. El objetivo es determinar E. La fuerza $\vec{F}$ queda fijada mediante la ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$. Por cinemática se puede calcular la aceleración, y la masa de la gota se puede determinar considerando el valor del radio y sabiendo que la densidad de la tinta es de 1000 kg/m³, es decir, idéntica a la del agua.

SOLUCIÓN

1. El campo eléctrico es igual a la fuerza dividida por la carga: $E = \dfrac{F}{q}$
2. La fuerza, dirigida hacia arriba en el sentido y, es igual a la masa por la aceleración: $F = ma_y$
3. El desplazamiento vertical se obtiene mediante las fórmulas de la cinemática, con aceleración constante y velocidad inicial $v_{0y} = 0$: $\Delta y = v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = 0 + \frac{1}{2}a_y t^2$
4. El tiempo de movimiento horizontal de la gota entre las placas es el que tarda en recorrer 1 cm a la velocidad de 40 m/s: $\Delta x = v_{0x}t = v_0 t$ por tanto, $t = \Delta x/v_0$
5. Despejando a_y, se obtiene: $a_y = \dfrac{2\Delta y}{t^2} = \dfrac{2\Delta y}{(\Delta x/v_0)^2} = \dfrac{2v_0^2\Delta y}{(\Delta x)^2}$
6. La masa es igual a la densidad por el volumen: $m = \rho V = \rho\frac{4}{3}\pi r^3$
7. El módulo del campo E viene dado por:

$$E = \frac{F}{q} = \frac{ma}{q} = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi r^3}{q}\frac{2v_0^2\Delta y}{(\Delta x)^2} = \frac{8\pi}{3}\frac{\rho r^3 v_0^2 \Delta y}{q(\Delta x)^2}$$

$$= \frac{8\pi}{3}\frac{(1000\ \text{kg/m}^3)(20{,}0\times10^{-6}\ \text{m})^3(40{,}0\ \text{m/s})^2(3{,}00\times10^{-3}\ \text{m})}{(2{,}00\times10^{-9}\ \text{C})(0{,}0100\ \text{m})^2} = \boxed{1{,}61\ \text{kN/C}}$$

COMPROBACIÓN Las unidades en la última línea del paso 7 son kg · m/(C · s²). Coincide con lo esperado, ya que 1 N = 1 kg · m/s².

OBSERVACIÓN El mecanismo de inyección de tinta de este ejemplo se denomina de desviación múltiple continua. Se usa en algunas impresoras industriales. Las impresoras para ordenadores personales no usan este mecanismo de desviación de las trayectorias de las gotas cargadas mediante un campo eléctrico.

DIPOLOS ELÉCTRICOS EN CAMPOS ELÉCTRICOS

En el ejemplo 21.9, analizamos el campo eléctrico producido por un dipolo, es decir, un sistema formado por dos cargas iguales y opuestas muy próximas entre sí. Aquí consideramos el comportamiento de un dipolo en un campo eléctrico externo. Ciertas moléculas poseen momentos dipolares eléctricos permanentes debido a una distribución no uniforme de carga dentro de la molécula. Tales moléculas se llaman **moléculas polares**. Un ejemplo es la molécula HCl, formada esencialmente por un ion de hidrógeno positivo de carga $+e$ combinado con un ion de cloro negativo de carga $-e$. El centro de carga del ion positivo no coincide con el centro de carga del ion negativo, de modo que la molécula posee un momento dipolar permanente. Otro ejemplo es el agua (figura 21.29).

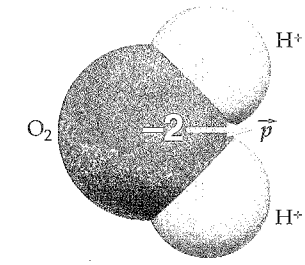


FIGURA 21.29 Una molécula H_2O posee un momento dipolar eléctrico permanente dirigido desde el centro de la carga negativa al centro de la carga positiva.

Un campo eléctrico externo uniforme no ejerce una fuerza neta sobre un dipolo, pero aparece un par de fuerzas que tiende a alinear el dipolo en la dirección del campo. En la figura 21.30, vemos que el módulo del momento de las fuerzas ejercidas sobre las cargas es $F_1L \operatorname{sen}\theta = qEL \operatorname{sen}\theta = pE \operatorname{sen}\theta$.* El momento está dirigido perpendicularmente al papel, hacia dentro, de tal modo que tiende a situar el momento dipolar $\vec{p}$ en la dirección del campo eléctrico $\vec{E}$. El momento del par puede escribirse convenientemente como el producto vectorial:

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \qquad 21.11$$

Cuando el dipolo gira un ángulo $d\theta$, el campo eléctrico realiza un trabajo

$$dW = -\tau d\theta = -pE \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

(El signo menos es debido a que el momento tiende a disminuir θ.) Igualando este trabajo con la disminución de energía potencial, resulta

$$dU = -dW = +pE \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

e integrando,

$$U = -pE \cos\theta + U_0$$

Si tomamos como cero de energía potencial la que corresponde a $\theta = 90°$, entonces la energía potencial del dipolo es

$$U = -pE \cos\theta = -\vec{p} \cdot \vec{E} \qquad 21.12$$

ENERGÍA POTENCIAL DE UN DIPOLO EN UN CAMPO ELÉCTRICO

Los hornos de microondas están basados en el momento dipolar eléctrico del agua para cocer alimentos. Como todas las ondas electromagnéticas, las microondas poseen campos eléctricos oscilantes que ejercen momentos sobre los dipolos eléctricos, provocando que las moléculas de agua giren con una energía cinética rotacional considerable. De este modo, se transfiere energía desde la radiación de microondas a las moléculas de agua de la comida a gran velocidad, gracias a lo cual el tiempo de cocción en un horno de microondas se reduce de forma significativa.

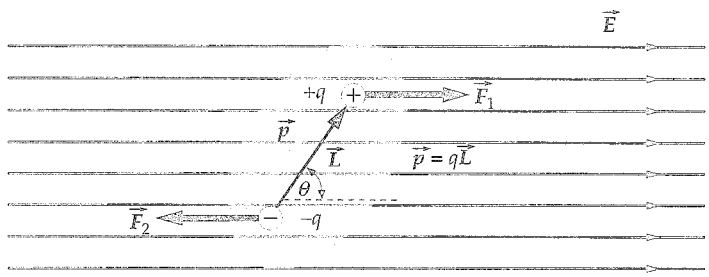


FIGURA 21.30 Un dipolo en un campo eléctrico uniforme experimenta fuerzas iguales y opuestas que tienden a girar el dipolo, de modo que su momento dipolar $\vec{p}$ tiende a alinearse con el campo eléctrico $\vec{E}$.

* El momento producido por dos fuerzas iguales y opuestas (sistema llamado par) es el mismo alrededor de cualquier punto del espacio.

Las **moléculas no polares** no poseen momento dipolar eléctrico permanente. Sin embargo, todas las moléculas neutras contienen cantidades iguales de carga positiva y negativa. En presencia de un campo eléctrico externo $\vec{E}$, las cargas se separan espacialmente. Las cargas positivas se mueven en la dirección de $\vec{E}$ y las negativas en dirección opuesta. La molécula adquiere de este modo un momento dipolar inducido paralelo al campo eléctrico externo y se dice entonces que está **polarizada**.

En un campo eléctrico no uniforme, un dipolo eléctrico experimenta una fuerza neta, ya que el campo eléctrico tiene módulos distintos en los centros de la carga positiva y negativa. La figura 21.31 muestra cómo una carga puntual positiva polariza a una molécula no polar y después la atrae. Un ejemplo conocido es la atracción que mantiene un globo electrostáticamente cargado pegado contra una pared. El campo no uniforme producido por la carga sobre el globo polariza las moléculas de la pared y las atrae. Una fuerza igual y opuesta se ejerce por las moléculas de la pared sobre el globo.

El diámetro de un átomo o molécula es del orden de 10^{-12} m = 0,1 nm. Una unidad adecuada para el momento dipolar eléctrico de los átomos y moléculas es la carga electrónica fundamental e multiplicada por la distancia de 1 pm. Por ejemplo, el momento dipolar del H_2O en estas unidades posee un módulo de unos 0,04 $e \cdot$ pm.

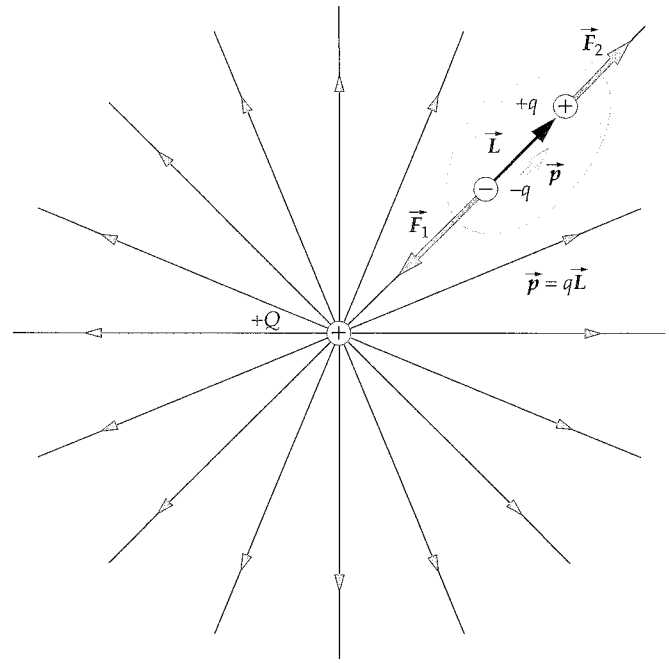


FIGURA 21.31 Una molécula no polar en un campo eléctrico no uniforme creado por una carga puntual $+Q$. La carga puntual atrae a las cargas negativas (los electrones) de la molécula y repele a las positivas (los protones). Como resultado de este hecho, el centro de "gravedad" de la carga $-q$ está más próximo a la carga $+Q$ que lo que está la carga positiva $+q$, y como consecuencia se induce un momento dipolar $\vec{p}$ paralelo al campo creado por la carga puntual $+Q$. Como $-q$ está más próximo a $+Q$ que $+q$, F_1 es mayor que F_2 y la molécula es atraída por la carga puntual. Además, si la carga puntual fuera negativa, el dipolo inducido sería el inverso y la molécula sería también atraída por la carga puntual.

Ejemplo 21.14 Momento de una fuerza debida al campo eléctrico y energía potencial

Un dipolo con un momento de módulo 0,02 $e \cdot$ pm forma un ángulo de 20° con un campo eléctrico uniforme de módulo 3×10^3 N/C (figura 21.32). Determinar (*a*) el módulo del momento que actúa sobre el dipolo y (*b*) la energía potencial del sistema.

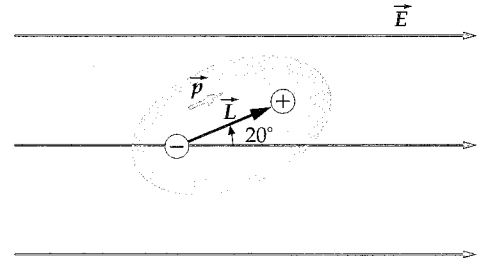


FIGURA 21.32

PLANTEAMIENTO El momento se deduce de la expresión $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$ y la energía potencial de $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$.

SOLUCIÓN

1. Calcular el módulo del momento:

$$\tau = |\vec{p} \times \vec{E}| = pE \operatorname{sen}\theta = (20\, e \cdot \text{pm})(3 \times 10^3 \text{ N/C})(\operatorname{sen} 20°)$$
$$= (0{,}02)(1{,}6 \times 10^{-19} \text{ C})(10^{-9} \text{ m})(3 \times 10^3 \text{ N/C})(\operatorname{sen} 20°)$$
$$= \boxed{3{,}3 \times 10^{-27} \text{ N} \cdot \text{m}}$$

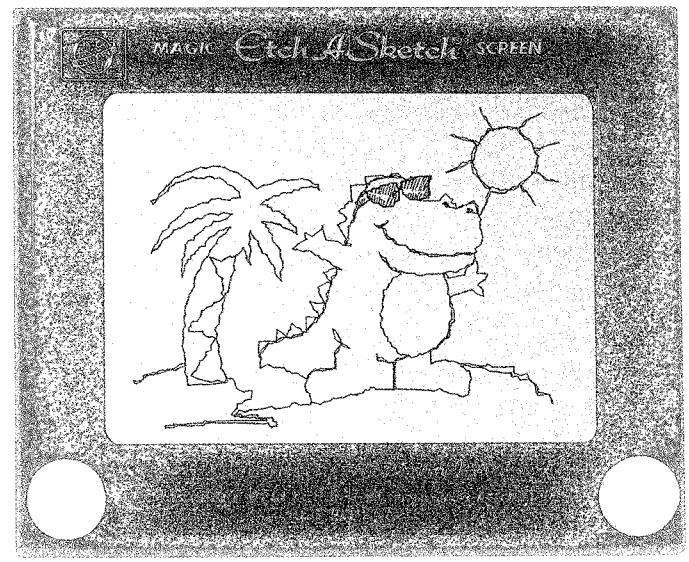
2. Calcular la energía potencial:

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE \cos\theta$$
$$= -(0{,}02)(1{,}6 \times 10^{-19} \text{ C})(10^{-9} \text{ m})(3 \times 10^3 \text{ N/C})\cos 20°$$
$$= \boxed{-9{,}0 \times 10^{-27} \text{ J}}$$

COMPROBACIÓN El signo de la energía potencial es negativo. Esto es así porque la orientación de referencia de la función energía potencial $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ es $U = 0$ para $\theta = 90°$. Para $\theta = 20°$ la energía potencial es menor que cero. El sistema tiene más energía potencial si $\theta = 20°$ que cuando $\theta = 90°$.

Recubrimiento industrial con polvo electrostático

Los niños de todo el mundo se han beneficiado de las propiedades triboeléctricas. La empresa americana Ohio Art Company lanzó al mercado el grabador de dibujos "Etch A Sketch" alrededor de 1960.[1] Las cuentas de "stirene" proveen de carga al polvo fino de aluminio cuando se agita. La pantalla translúcida del juguete atrae al polvo cargado y con un punzón o estilo se puede dibujar trazando líneas sobre el polvo. El juguete se basa en que la pantalla y el polvo de aluminio se atraen mutuamente por tener cargas opuestas.



El polvo fino es atraído hacia el reverso de la pantalla por efecto electrostático. Girando los botones se hace desaparecer el dibujo por una pequeña barrita. *(Gentileza de The Ohio Art Company.)*

Aunque el polvo cargado puede ser un juguete, también puede servir para actividades industriales serias. Los metales tienden a corroerse si no se les proporciona protección. Para prevenir la corrosión, las partes metálicas de los automóviles, aparatos metálicos y otros objetos de metal deben ser recubiertas. En el pasado, estos recubrimientos se realizaban mediante lacas, barnices y esmaltes que se aplicaban en forma líquida y se dejaban secar. Estos líquidos tienen inconvenientes.[2] Los disolventes tardan tiempo en secarse y emanan fluidos volátiles indeseables. Las superficies con protuberancias se suelen recubrir de forma no uniforme. Los pulverizadores producen residuos que no son fáciles de reciclar. El recubrimiento con polvo electrostático reduce todos estos problemas.[3] Este método de recubrimiento se usó por primera vez en la década de 1950, y actualmente es muy utlizado por los fabricantes, cada vez más comprometidos en cumplir los convenios medioambientales de reducción de emisión de productos químicos volátiles.

El polvillo protector se aplica suministrándole una carga eléctrica al objeto que se ha de recubrir.[4] Esto es mucho más fácil si el objeto a recubrir es conductor. Entonces, partículas[5] muy pequeñas de polvo, entre 1 μm y 100 μm, adquieren cargas de signo opuesto. Estas partículas son atraídas por el objeto que se desea cubrir, de tal forma que las partículas que quedan sueltas son fácilmente reciclables. Cuando las partículas ya están en el objeto, se fija el recubrimiento mediante luz ultravioleta o con tratamiento térmico. El tratamiento de fijado inmoviliza las moléculas del polvo protector y las partículas entonces pierden sus cargas.

Las partículas se cargan mediante una descarga de corona o mediante un proceso de carga triboeléctrico.[6] La descarga de corona insufla las partículas a través del plasma electrónico cargándolas negativamente. El proceso de carga tribológico aplica las partículas a través de un tubo construido de un material que está en el extremo opuesto del espectro triboleléctrico; con frecuencia se utiliza teflón. A las partículas de recubrimiento se les suministra carga positiva mediante un contacto rápido. Al objeto que hay que recubrir se le suministra carga cuyo signo depende del procedimiento seguido para recubrirlo. En función del recubrimiento y de los aditivos, las cargas que se suministran a los objetos varían entre 500 y 1000 μC/kg.[7] El proceso de fijación depende del material utilizado en el recubrimiento y del objeto a recubrir. El tiempo de fijado puede durar entre 1 y 30 minutos.[8]

Aunque el polvo del recubrimiento es económico y preserva el medio ambiente, presenta algunos inconvenientes. La capacidad de las partículas del polvo protector para mantener la carga[9] depende de la humedad, la cual deberá ser cuidadosamente controlada.[10] Si el campo eléctrico creado por la descarga de corona es demasiado fuerte, el polvo se lanza demasiado rápidamente hacia el objeto a recubrir, dejando motas al descubierto en el centro de círculos que dan un aspecto de "peladura de naranja".[11] El polvo electrostático puede ser juego de niños, pero también puede servir para complejos procesos de producción.

---

[1] Grandjean, A., "Tracing Device." *U.S. Patent No. 3,055,113*, Sept. 25, 1962.
[2] Matheson, R. D. "20th- to 21st-Century Technological Challenges in Soft Coatings." *Science*, Aug. 9, 2002, Vol. 297, No. 5583, pp. 976–979.
[3] Hammerton, D., and Buysens, K., "UV-Curable Powder Coatings: Benefits and Performance." *Paint and Coatings Industry*, Aug. 2000, p. 58.
[4] Zeren, S., and Renoux, D., "Powder Coatings Additives." *Paint and Coatings Industry*, Oct. 2002, p. 116.
[5] Hemphill, R., "Deposition of $BaTiO_3$ Nanoparticles by Electrostatic Spray Powder Charging." *Paint and Coatings Industry*, Apr. 2006, pp. 74–78.
[6] Czyzak, S. J., and Williams, D. T., "Static Electrification of Solid Particles by Spraying." *Science*, Jul. 20, 1951, Vol 14, pp. 66–68.
[7] Zeren, S., and Renoux, D., op. cit.
[8] Hammerton, D., and Buysens, K., op. cit.
[9] O'Konski, C. T., "The Exponential Decay Law in Spray De-electrification." *Science*, Oct. 5, 1951, Vol. 114, p. 368.
[10] Sharma, R., et al., "Effect of Ambient Relative Humidity and Surface in Modification on the Charge Decay Properties of Polymer Powders in Powder Coating." *IEEE Transactions on Industry Applications*, Jan./Feb. 2003, Vol. 39, No. 1, pp. 87–95.
[11] Wostratzky, D., Lord, S., and Sitzmann, E. V., "Power!" *Paint and Coatings Industry*, Oct. 2000, p. 54.

Resumen

1. Cuantización y conservación son propiedades fundamentales de la carga eléctrica.
2. La ley de Coulomb es la ley fundamental de la interacción entre las cargas en reposo.
3. El campo eléctrico describe la condición establecida en el espacio por una distribución de cargas.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES
1. Carga eléctrica	Existen dos clases de carga eléctrica, llamadas positiva y negativa. Cargas del mismo signo se repelen y de signo contrario se atraen.
Cuantización	La carga eléctrica está cuantizada: siempre se presenta por múltiplos enteros de la unidad fundamental de carga e. La carga del electrón es $-e$ y la del protón $+e$.
Magnitud	$e = 1{,}60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$
Conservación	La carga se conserva, es decir, en cualquier proceso, la carga ni se crea ni se destruye; simplemente se transfiere.
2. Conductores y aislantes	En los conductores, aproximadamente un electrón por átomo posee libertad de movimiento en todo el material. En los aislantes, todos los electrones están ligados a los átomos próximos.
Tierra	Así se llama un conductor muy extenso que puede suministrar una cantidad ilimitada de carga (tal como el suelo terrestre).
3. Carga por inducción	Carga de un conductor por inducción. Se conecta a tierra el conductor, y se mantiene una carga externa cerca de él para atraer o repeler electrones de conducción. Seguidamente, se desconecta el conductor de tierra y, por último, se aleja la carga externa del conductor.
4. Ley de Coulomb	La fuerza ejercida por una carga q_1 sobre q_2 a una distancia r_{12} viene dada por $$\vec{F}_{12} = \frac{kq_1q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12} \qquad 21.4$$ donde $\hat{r}_{12}$ es un vector unitario dirigido de q_1 a q_2.
Constante de Coulomb	$k = 8{,}99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$ (21.3)
5. Campo eléctrico	El campo eléctrico debido a un sistema de cargas en un punto se define como la fuerza neta $\vec{F}$, ejercida por aquellas cargas sobre una carga testigo positiva q_0, dividida por q_0: $$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \qquad 21.5$$
Debido a una carga puntual	$$\vec{E}_{iP} = \frac{kq_i}{r_{iP}^2}\hat{r}_{iP} \qquad 21.7$$
Debido a un sistema de cargas puntuales	El campo eléctrico debido a varias cargas es la suma vectorial de los campos debidos a las cargas individuales: $$\vec{E}_P = \sum_i \vec{E}_{iP} \qquad 21.8$$
6. Líneas de campo eléctrico	El campo eléctrico puede representarse mediante líneas del campo eléctrico o de fuerza que se originan en las cargas positivas y terminan en las cargas negativas. La intensidad del campo eléctrico viene indicada por la densidad de las líneas de fuerza.
7. Dipolo eléctrico	Un dipolo eléctrico es un sistema de dos cargas iguales, pero opuestas, separadas por una distancia pequeña.
Momento dipolar	$$\vec{p} = q\vec{L} \qquad 21.9$$ donde $\vec{L}$ apunta de la carga negativa a la positiva.
Campo debido a un dipolo	El campo eléctrico en un punto alejado de un dipolo es proporcional al momento dipolar y disminuye con el cubo de la distancia.
Momento sobre un dipolo	En un campo eléctrico uniforme, la fuerza neta que actúa sobre un dipolo es cero, pero existe un momento τ dado por $$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \qquad 21.11$$

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
Energía potencial de un dipolo	$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} + U_0$ donde U_0 suele considerarse nulo.	21.12
8. Moléculas polares y no polares	Las moléculas polares, tales como H_2O poseen momentos dipolares permanentes, ya que en ellas no coinciden los centros de la carga positiva y negativa. Se comportan como simples dipolos en un campo eléctrico. Las moléculas no polares carecen de momentos dipolares permanentes, pero adquieren momentos dipolares inducidos en presencia de un campo eléctrico.	

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

21.1 (*a*) $+\frac{1}{2}Q$. Como las esferas son idénticas, deberán compartir la carga total a partes iguales. (*b*) $+2Q$, que es necesario para satisfacer la conservación de la carga.

21.2 $Q_1 = +Q/2$, $Q_2 = -Q/4$, y $Q_3 = -Q/4$

Respuestas a los problemas prácticos

21.1 $N = Q/e = (50 \times 10^{-9}\,\text{C})/(1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{C}) = 3{,}1 \times 10^{11}$. La cuantización de la carga no se puede detectar en una carga de esta dimensión; incluso añadiendo o quitando un millón de electrones no se produce un efecto apreciable.

21.2 Alrededor de $3{,}5 \times 10^{-8}$ por ciento

21.3 $2{,}25 \times 10^{-3}\,\text{N}$

21.4 $+(6{,}3\,\mu\text{N})\hat{\imath}$

21.5 $\hat{r}_{10} = (\hat{\imath} + \hat{\jmath})/\sqrt{2}$

21.6 No, pero supongamos que así fuera: como la componente x de $\vec{r}_{10}$ es menor que el módulo de $\vec{r}_{10}$, tal denominador de kq_1q_0/x_{10}^2 es menor que el de kq_1q_0/r_{10}^2. Esto implicaría que la componente x de $\vec{F}_{10}$ es mayor que el módulo de $\vec{F}_{10}$, lo cual es imposible porque la componente de un vector nunca puede ser mayor que su módulo. En consecuencia, la componente x de la fuerza $\vec{F}_{10} = (kq_1q_0/r_{10}^2)\hat{r}_{10}$ no es necesariamente igual a $F_{10x} = kq_1q_0/x_{10}^2$.

21.7 $\vec{E} = \vec{F}/q_0 = (4{,}0 \times 10^4\,\text{N/C})\hat{\imath}$

21.8 $\vec{F} = -(6{,}4 \times 10^{-15}\,\text{N})\hat{\imath}$

21.9 $x = 1{,}80\,\text{m}$

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

○ Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil

○○ Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos

○○○ Desafiante, para alumnos avanzados

SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*

Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 ○ Los objetos se componen de átomos que a su vez están compuestos de partículas cargadas (protones y electrones); sin embargo, es rara la ocasión en la que se observa la fuerza electrostática. Explicar por qué no se suelen observar estos efectos.

2 ○ Un átomo de carbono se convierte en ion si se le quitan uno o más electrones en un proceso de ionización ¿Cuál es la carga del átomo de carbono al que se le han quitado dos de sus electrones? (*a*) $+e$. (*b*) $-e$. (*c*) $+2e$. (*d*) $-2e$.

3 ○○ En una clase de Física, se realiza un experimento con el que, aparentemente, se refuta la ley de Coulomb. Se pasa un peine de goma o caucho por el pelo y después se observa cómo atrae pequeñas trocitos de papel. Entonces, quien hace la experiencia argumenta que la ley de Coulomb establece que para que haya fuerzas electrostáticas de atracción entre dos objetos, ambos tienen que estar cargados. Sin embargo, el papel no lo estaba y, por consiguiente, de acuerdo con la ley de Coulomb, no debería haber fuerzas atractivas entre el peine y el papel como claramente existían en la demostración. (*a*) ¿Qué hay de erróneo en esta argumentación? (*b*) ¿Es necesario para que exista fuerza de atracción entre papel y peine que éste tenga carga neta negativa? Explicar las respuestas.

4 ○○ Se tienen dos esferas metálicas y una barra de aislante cargada positivamente sobre una mesa. ¿Cómo se puede utilizar la barra para inducir sobre las esferas carga negativa? ¿Y positiva?

5 ○○ Dos partículas cargadas de $+4q$ y $-3q$ se encuentran a una distancia d. Dibujar las líneas de campo en (*a*) las proximidades del sistema, y (*b*) puntos localizados a distancias de las cargas mucho mayores que d.

6 ●● Se carga positivamente una esfera metálica. ¿Es posible que ésta atraiga a una bola cargada positivamente también? Razonar la respuesta.

7 ●● Se puede hacer una simple demostración de la fuerza atractiva electrostática haciendo oscilar una bola de papel de aluminio arrugada colgando de una cuerda y acercando una barrita cargada cerca de la bola. Inicialmente, la barra atraerá a la bola, pero si la bola toca a la barra, ésta la repelerá bruscamente. Explicar todo ello.

8 ●● Se coloca una carga puntual positiva en $x = 0{,}00$ y otra igual en $x = 1{,}00$ m, ambas sobre el eje x. Se pone una tercera carga puntual y positiva en una posición de equilibrio. (*a*) ¿Cuál es esa posición? (*b*) ¿Es estable dicho equilibrio si la tercera carga queda obligada a moverse, en su caso, paralela al eje x? (*c*) ¿Y si la carga estuviera constreñida a moverse a lo largo del eje y? Explicar las respuestas.

9 ●● Dos esferas conductoras sin carga con sus superficies conductoras en contacto, están apoyadas sobre una gran tabla de madera bien aislada. Una barra cargada positivamente se aproxima a una de las esferas por el lado opuesto a su punto de contacto con la otra esfera. (*a*) Describir las cargas inducidas sobre las dos esferas conductoras y representar las distribuciones de carga sobre ellas. (*b*) Las dos esferas se alejan entre sí y la barra cargada se separa. Dibujar las distribuciones de carga sobre las esferas separadas.

10 ●● Tres cargas, $+q$, $+Q$ y $-Q$, se sitúan en los vértices de un triángulo equilátero, como muestra la figura 21.33. (*a*) ¿Cuál es la fuerza neta sobre la carga $+q$ debida a las otras dos cargas? (*b*) ¿Cuál es la fuerza neta total del sistema de tres cargas?

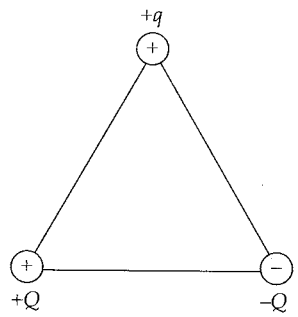


FIGURA 21.33 Problema 10

11 ●● Una carga positiva es libre de moverse en una región donde hay un campo eléctrico $\vec{E}$. ¿Cuáles de estas afirmaciones son ciertas?

(*a*) La partícula se acelerará en la dirección perpendicular al campo $\vec{E}$.
(*b*) La partícula se acelerará en la dirección paralela al campo $\vec{E}$.
(*c*) Se moverá en la dirección del campo $\vec{E}$.
(*d*) Podría estar momentáneamente en reposo.
(*e*) La fuerza que recibe la partícula es opuesta a la dirección del campo $\vec{E}$.
(*f*) La partícula se moverá en dirección opuesta al campo $\vec{E}$.

12 ●● Si cuatro cargas están localizadas en los vértices de un cuadrado, como indica la figura 21.34, el campo $\vec{E}$ es cero en:

(*a*) Todos los puntos situados sobre los lados del cuadrado que están a mitad de camino entre las dos cargas.
(*b*) El punto central del cuadrado.
(*c*) El punto a mitad de camino entre las dos cargas superiores y en el punto a mitad de camino entre las dos cargas inferiores.

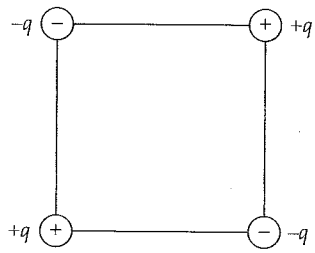


FIGURA 21.34 Problema 12

13 ●● Dos partículas cargadas de $+q$ y $-3q$ se separan una distancia d. Dibujar las líneas de campo (*a*) en la proximidades del sistema y (*b*) en puntos localizados a distancias de las cargas mucho mayores que d. SSM

14 ●● Tres cargas puntuales positivas están fijas en los vértices de un triángulo equilátero de lado a. El origen de coordenadas está en la mitad de un lado de un triángulo, el centro del triángulo en $x = x_1$, y el vértice opuesto al origen en $x = x_2$. (*a*) Expresar x_1 y x_2 en función de a. (*b*) Dar una expresión del campo eléctrico en el eje x en el intervalo entre 0 y x_2. (*c*) Demostrar que la expresión obtenida en (*b*) da los resultados esperados para $x = 0$ y $x = x_1$.

15 ●● Una molécula de momento dipolar eléctrico $\vec{p}$ está orientada de modo que $\vec{p}$ forma un ángulo θ con un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$. El dipolo puede moverse libremente en respuesta a la fuerza ejercida por el campo. Describir el movimiento del dipolo.

16 ●● Verdadero o falso:

(*a*) El campo eléctrico de una carga puntual tiene un sentido siempre de alejamiento de la carga.
(*b*) La fuerza eléctrica sobre una partícula cargada en un campo eléctrico tiene siempre el mismo sentido que el campo.
(*c*) Las líneas de campo eléctrico nunca pueden cortarse en un punto del espacio.
(*d*) Todas las moléculas poseen momentos dipolares eléctricos en presencia de un campo eléctrico externo.

17 ●● Dos moléculas tienen momentos dipolares cuyos módulos son iguales y cuyas orientaciones se muestran en la figura 21.35. Determinar la dirección del campo eléctrico en cada uno de los puntos numerados en la figura. SSM

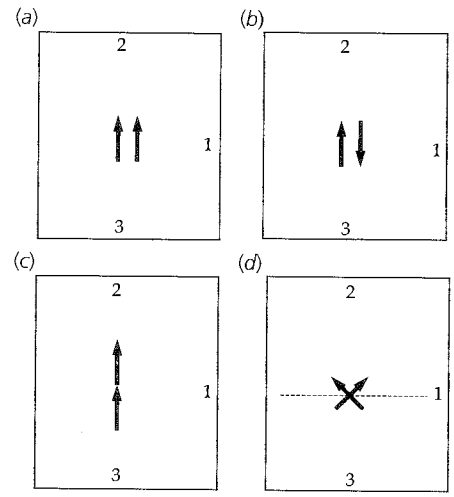


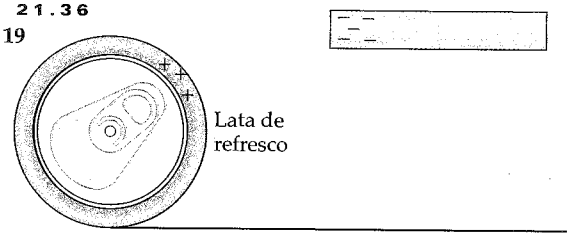
FIGURA 21.35 Problema 17

ESTIMACIONES Y APROXIMACIONES

18 ●● Hacer una estimación de la fuerza requerida para enlazar dos protones en un núcleo de helio. *Ayuda: considerar los protones como cargas puntuales haciendo una estimación aproximada de la separación de ambos.*

19 ●● Una conocida demostración práctica consiste en frotar con un trozo de piel una varilla (mágica?) de plástico con objeto de cargarla, y seguidamente acercarla a una lata vacía (ver figura 21.36). Explicar por qué la lata rodará hacia la barra.

FIGURA 21.36 Problema 19



20 ●● Las descargas eléctricas (chispas) se producen en el aire cuando un campo eléctrico acelera los iones libres hasta velocidades suficientemente altas como para ionizar las moléculas de un gas mediante su impacto con ellas. (*a*) Asumiendo que cada ion, en promedio, se desplaza en el gas un espacio denominado *recorrido medio libre* antes de chocar con una molécula y que este ion necesita, aproximadamente, 1 eV de energía para poder ionizarla, estimar la intensidad del campo necesaria

para producir la rotura dieléctrica del aire, a una presión y temperatura de 105 N/m² y 300 K, respectivamente. Considerando que el área de la sección trasversal de una molécula de nitrógeno es de 0,1 nm², (*b*) ¿cómo variará el potencial de rotura dieléctrica con la temperatura? ¿Y con la presión?

CARGA ELÉCTRICA

21 ◦ Al frotar una barra de plástico con un paño de lana, aquella adquiere una carga de $-0{,}8\ \mu C$. ¿Cuántos electrones se transfieren del paño de lana a la barra de plástico?

22 ◦ Una carga igual a la de un número de Avogadro ($N_A = 6{,}02 \times 10^{23}$) de protones se denomina un *faraday*. Calcular el número de coulombs que hay en un faraday.

23 ◦ ¿Cuál es la carga total de todos los protones de 1,00 kg de carbono? SSM

24 ◦◦ Suponer un cubo de aluminio de 1,00 cm de lado que acumula una carga neta de +2,50 pC. (*a*) ¿Cuál es el porcentaje de electrones que se ha eliminado? (*b*) ¿Qué porcentaje de masa se le ha extraído?

25 ◦◦ Durante un proceso denominado *efecto fotoeléctrico*, se utiliza luz altravioleta para cargar una pieza de metal. (*a*) Si esa luz incide en una lámina de metal y los electrones son extraídos con suficiente energía como para que salgan de la superficie del metal, ¿cuánto tiempo tardará éste en adquirir 1,5 nC si son extraídos $1{,}00 \times 10^6$ electrones por segundo? (*b*) Si se necesitan 1,3 eV para extraer un electrón de la superficie, ¿que potencia debe tener el rayo luminoso asumiendo que en todo el proceso la eficiencia es del 100%?

LEY DE COULOMB

26 ◦ Una carga $q_1 = 4{,}0\ \mu C$ está en el origen y otra carga $q_2 = 6{,}0\ \mu C$ está sobre el eje x en el punto $x = 3{,}0$ m. (*a*) Hallar la fuerza ejercida sobre la carga q_2. (*b*) Hallar la fuerza ejercida sobre q_1. (*c*) ¿En qué diferirán estas respuestas, (*a*) y (*b*), si q_2 vale $-6{,}0\ \mu C$?

27 ◦ Tres cargas puntuales están en el eje x; $q_1 = -6{,}0\ \mu C$ está en $x = -3{,}0$ m, $q_2 = 4{,}0\ \mu C$ está en el origen y $q_3 = -6{,}0\ \mu C$ está en $x = 3{,}0$ m. Hallar la fuerza ejercida sobre q_1. SSM

28 ◦◦ Dos cargas puntuales de 2 y 4 μC, respectivamente, están separadas una distancia L. ¿Dónde se debería poner una tercera carga para que la fuerza eléctrica sobre ella fuera nula?

29 ◦◦ Dos cargas puntuales de -2 y 4 μC, respectivamente, están separadas una distancia L. ¿Dónde se debería poner una tercera carga para que la fuerza eléctrica sobre ella fuera nula?

30 ◦◦ Tres cargas, cada una de módulo 3 nC, están en los vértices de un cuadrado de lado 5 cm. Las dos cargas de los vértices opuestos son positivas y la otra es negativa. Determinar la fuerza ejercida por estas cargas sobre una cuarta carga $q_4 = +3$ nC situada en el vértice restante.

31 ◦◦ Una carga de 5 μC se encuentra sobre el eje y en $y = 3$ cm y una segunda carga de $-5{,}0\ \mu C$ está sobre el eje y en $y = -3$ cm. Determinar la fuerza ejercida sobre una carga de 2 μC situada sobre el eje x en $x = 8$ cm.

32 ◦◦ Una carga puntual de $-2{,}5\ \mu C$ está localizada en el origen. Una segunda carga puntual de 6 μC se encuentra en $x = 1$ m, $y = 0{,}5$ m. Determinar las coordenadas x e y de la posición en la cual un electrón estaría en equilibrio.

33 ◦◦ Una carga de $-1{,}0\ \mu C$ está localizada en el origen, una segunda carga de 2,0 μC está localizada en $x = 0$, $y = 0{,}1$ m y una tercera de 4,0 μC en $x = 0{,}2$ m, $y = 0$. Calcular las fuerzas que actúan sobre cada una de las tres cargas.

34 ◦◦ Una carga de 5,0 μC está localizada en $x = 0$, $y = 0$. Otra carga q está localizada en $x = 4{,}0$ cm, $y = 0$. La fuerza que actúa sobre una carga de 2 μC en $x = 8{,}0$ cm, $y = 0$ es 19,7 N, apuntando en la dirección x negativa. Cuando esta carga de 2 μC se sitúa en $x = 17{,}75$ cm, $y = 0$, la fuerza que actúa sobre ella es nula. Determinar el valor de la carga q.

35 ◦◦◦ Cinco cargas iguales Q están igualmente espaciadas en un semicírculo de radio R como indica la figura 21.37. Determinar la fuerza (en función de k, Q y R) que se ejerce sobre una carga q localizada equidistante de las otras cargas en el centro del semicírculo. SSM

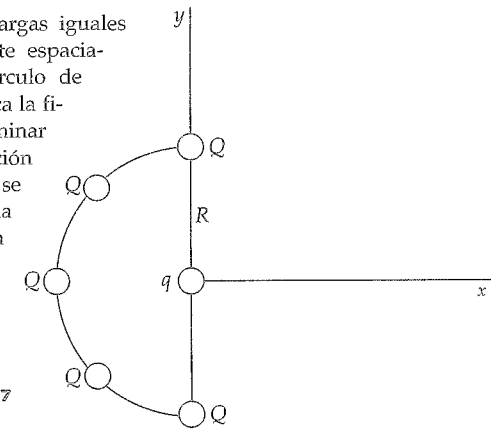


FIGURA 21.37
Problema 35

36 ◦◦◦ La configuración de la molécula de amoníaco (NH_3) es, aproximadamente, la de un tetraedro regular con tres iones H^+ formando la base y un ion N^{3-} en el vértice del tetraedro. La longitud de cada lado es $1{,}64 \times 10^{-10}$ m. Calcular la fuerza que actúa sobre cada ion.

EL CAMPO ELÉCTRICO

37 ◦ Una carga de 4,0 μC está en el origen. ¿Cuál es el módulo y sentido del campo eléctrico sobre el eje x en (*a*) $x = 6$ m y (*b*) $x = -10$ m? (*c*) Hacer un esquema de la función E_x respecto a x tanto para valores positivos como negativos de x. (Recuérdese que E_x es negativo cuando $\vec{E}$ señala en el sentido negativo de las x.) SSM

38 ◦ Dos cargas puntuales, cada una de ellas de $+4\ \mu C$, están sobre el eje x, una en el origen y la otra en $x = 8$ m. Hallar el campo eléctrico sobre el eje x en (*a*) $x = -2$ m, (*b*) $x = 2$ m, (*c*) $x = 6$ m y (*d*) $x = 10$ m. (*e*) ¿En qué punto del eje x es cero el campo eléctrico? (*f*) Hacer un esquema de E_x en función de x en el intervalo $-3{,}0\ \text{m} < x < 11$ m.

39 ◦ Cuando se coloca una carga testigo $q_0 = 2$ nC en el origen, experimenta la acción de una fuerza de $8{,}0 \times 10^{-4}$ N en la dirección positiva del eje de las y. (*a*) ¿Cuál es el campo eléctrico en el origen? (*b*) ¿Cuál sería la fuerza que se ejercería sobre una carga de -4 nC situada en el origen? (*c*) Si esta fuerza fuera debida a una carga situada sobre el eje y en $y = 3$ cm, ¿cuál sería el valor de dicha carga?

40 ◦ La Tierra tiene un campo eléctrico cerca de su superficie que es de, aproximadamente, 150 N/C y que está dirigido hacia abajo. (*a*) Comparar la fuerza eléctrica ascendente ejercida sobre un electrón con la fuerza gravitatoria dirigida hacia abajo. (*b*) ¿Qué carga debería suministrarse a una moneda de 3 g para que el campo eléctrico equilibrase su peso cerca de la superficie de la Tierra?

41 ◦◦ Dos cargas iguales positivas de valor $q_1 = q_2 = 6{,}0$ nC están sobre el eje y en puntos $y_1 = +3$ cm e $y_2 = -3$ cm. (*a*) ¿Cuál es el valor y sentido del campo eléctrico sobre el eje x en $x = 4$ cm? (*b*) ¿Cuál es la fuerza ejercida sobre una tercera carga $q_0 = 2$ nC situada en el punto $x = 4$ cm? SSM

42 ◦◦ Una carga puntual de $+5\ \mu C$ está localizada en $x = -3{,}0$ cm y una segunda carga puntual de $-8\ \mu C$ está localizada en $x = +4{,}0$ cm. ¿Dónde debe situarse una tercera carga de 6 μC para que el campo eléctrico en $x = 0$ sea cero?

43 •• Una carga puntual de $-5\ \mu C$ está localizada en $x = 4$ m, $y = -2$ m. Una segunda carga puntual de $12\ \mu C$ está localizada en $x = 1$ m, $y = 2$ m. (*a*) Determinar el módulo, la dirección y el sentido del campo eléctrico en $x = -1$ m, $y = 0$. (*b*) Calcular el módulo, la dirección y el sentido de la fuerza sobre un electrón situado en $x = -1$ m, $y = 0$.

44 •• Dos cargas positivas iguales q están en el eje y; una está en $y = a$ y la otra en $y = -a$. (*a*) Demostrar que el campo eléctrico en el eje x está dirigido a lo largo de dicho eje con $E_x = 2kqx/(x^2 + a^2)^{3/2}$. (*b*) Demostrar que en las proximidades del origen, donde x es mucho menor que a, $E_x \approx 2kqx/a^3$. (*c*) Demostrar que para x mucho mayor que a, $E_x \approx 2kq/x^2$. Explicar por qué debería esperarse este resultado incluso antes de ser calculado.

45 •• Una carga puntual de $5\ \mu C$ está localizada en $x = 1$ m, $y = 3$ m y otra carga de $-4\ \mu C$ está localizada en $x = 2$ m, $y = -2$ m. (*a*) Determinar el módulo, la dirección y el sentido del campo eléctrico en $x = -3$ m, $y = 1$ m. (*b*) Determinar el módulo, la dirección y el sentido de la fuerza sobre un protón en $x = -3$ m, $y = 1$ m.

46 •• Dos cargas Q puntuales positivas están en $y = +a$ y en $y = -a$. (*a*) Demostrar que el campo eléctrico para la distribución de cargas tiene su máximo valor en los puntos $x = a/\sqrt{2}$ y $x = -a/\sqrt{2}$ calculando $\partial E_x/\partial x$ y haciendo la derivada igual a cero. (*b*) Hacer un esquema de la función E_x en función de x utilizando los resultados del apartado (*a*) de este problema y considerando que E_x es, aproximadamente, $2kqx/a^3$ cuando $x << a$, y que E_x es, aproximadamente, $2kq/x^2$ cuando $x >> a$.

47 •• Dos partículas puntuales con carga q cada una de ellas se colocan en la base de un triángulo equilátero de lado L (figura 21.38). Una tercera partícula puntual de carga $2q$ se coloca en el otro vértice ¿Dónde deberíamos colocar una cuarta carga puntual q para que el campo eléctrico en el centro del triángulo fuera cero? (El centro está en el plano del triángulo y equidistante de los tres vértices.) SSM

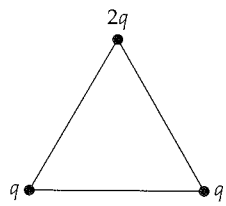


FIGURA 21.38
Problemas 47 y 48

48 •• Dos partículas puntuales con carga q cada una de ellas se colocan en la base de un triángulo equilátero de lado L (figura 21.38). Una tercera partícula puntual de carga $2q$ se coloca en el otro vértice. Se coloca una cuarta carga puntual q' en el punto medio de la base, de tal forma que la carga eléctrica en el centro del triángulo es cero. ¿Cuál es el valor de q'? (El centro está en el plano del triángulo y equidistante de los tres vértices.)

49 •• Dos cargas positivas iguales $+q$ están en el eje y; una de ellas en $y = +a$ y la otra en $y = -a$. El campo eléctrico se anula en el origen. Una carga de prueba q_0 situada en el origen estará por lo tanto en equilibrio. (*a*) Estudiar la estabilidad del equilibrio para una carga de prueba positiva considerando desplazamientos pequeños del equilibrio a lo largo del eje x y desplazamientos pequeños a lo largo del eje y. (*b*) Repetir el apartado (*a*) para una carga de prueba negativa. (*c*) Hallar el valor y signo de una carga q_0 que puede situarse en el origen de modo que la fuerza neta sobre cada una de las tres cargas sea cero. (*d*) Explicar qué ocurre si cualquiera de las cargas se desplaza ligeramente del equilibrio.

50 ••• Dos cargas puntuales positiva $+q$ están sobre el eje y en $y = +a$ e $y = -a$. Una cuenta de collar de masa m con una carga negativa $-q$ se desliza sin rozamiento a lo largo de una cuerda situada sobre el eje x. (*a*) Demostrar que para pequeños desplazamientos $x << a$, la cuenta experimenta una fuerza de restitución proporcional a x, y que, por lo tanto, experimenta un movimiento armónico simple. (*b*) Determinar el periodo del movimiento.

MOVIMIENTO DE CARGAS PUNTUALES EN CAMPOS ELÉCTRICOS

51 •• La aceleración de una partícula en un campo eléctrico depende de la relación carga/masa de la partícula. (*a*) Calcular e/m para un electrón. (*b*) ¿Cuál es el módulo y dirección de la aceleración de un electrón en un campo eléctrico uniforme de valor 100 N/C? (*c*) Cuando la velocidad de un electrón se aproxima a la velocidad de la luz c, debe utilizarse la mecánica relativista para determinar su movimiento; sin embargo, a velocidades bastante menores que c puede utilizarse la mecánica newtoniana. Calcular, con la mecánica de Newton, el tiempo que tarda un electrón, partiendo del reposo en el interior de un campo eléctrico de valor 100 N/C, en alcanzar una velocidad de $0{,}01\ c$. (*d*) ¿Qué distancia recorrerá el electrón en este tiempo? SSM

52 • La aceleración de una partícula en un campo eléctrico depende de su relación carga/masa. (*a*) Calcular e/m para un protón y hallar su aceleración en un campo eléctrico uniforme de valor 100 N/C. (*b*) Hallar el tiempo que tarda un protón inicialmente en reposo en dicho campo en alcanzar la velocidad de $0{,}01c$ (siendo c la velocidad de la luz). (Cuando la velocidad del protón se aproxima a la de la luz, debe usarse la cinemática relativista para calcular el movimiento; sin embargo, para una velocidad $0{,}01c$ o menor, la cinemática clásica es una suficiente aproximación.)

53 • Un electrón tiene una velocidad inicial de 2×10^6 m/s en la dirección del eje de las x. Entra en el interior de un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = (300\ \text{N/C})\hat{j}$ que tiene la dirección y. (*a*) Hallar la aceleración del electrón. (*b*) ¿Cuánto tiempo tardará el electrón en recorrer 10 cm en la dirección x? (*c*) ¿Cuál será el módulo y la dirección de la desviación del electrón después de haber recorrido 10 cm en la dirección x?

54 •• Un electrón, partiendo del reposo, se acelera por la acción de un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = -1{,}50 \times 10^{-10}\ \text{N/C}\hat{j}$. Después de que el electrón recorra $1{,}0\ \mu$m, ¿cuál es su velocidad? (Despreciar la fuerza gravitacional sobre el electrón.)

55 •• Una masa de 2 g localizada en una región de campo eléctrico uniforme $\vec{E} = (300\ \text{N/C})\hat{i}$ contiene una carga Q. La masa, liberada del reposo en $x = 0$, posee una energía cinética de 0,12 J en $x = 0{,}50$ m. Determinar la carga Q.

56 •• Una partícula sale del origen con una velocidad de 3×10^6 m/s, formando un ángulo de 35° con el eje x. Se mueve en un campo eléctrico constante $\vec{E} = -E_0\hat{j}$. Determinar E_0 para que la partícula cruce el eje x en $x = 1{,}5$ cm si (*a*) se trata de un electrón y (*b*) es un protón.

57 •• Un electrón parte de la posición indicada en la figura 21.39 con una velocidad inicial $v_0 = 5 \times 10^6$ m/s formando un ángulo de 45° con el eje x. El campo eléctrico tiene la dirección y positiva y su módulo es de $3{,}5 \times 10^3$ N/C. ¿Sobre qué placa y en qué lugar chocará el electrón? SSM

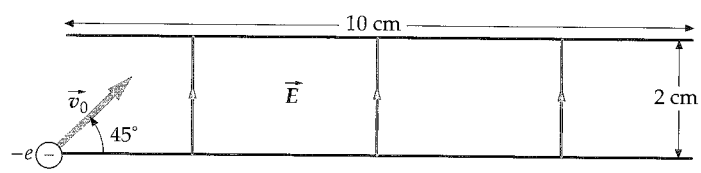


FIGURA 21.39 **Problema 57**

58 •• **APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un electrón cuya energía cinética es 2×10^{-16} J se mueve hacia la derecha a lo largo del eje de un tubo de rayos catódicos, como se indica en la figura 21.40. En la región comprendida entre las placas deflectoras existe un campo eléctrico de valor $\vec{E} = (2{,}00 \times 10^4\ \text{N/C})\hat{j}$. Fuera de esta región, $\vec{E} = 0$. (*a*) ¿A qué distancia del eje del tubo se encuentra el electrón

cuando alcanza el extremo de las placas? (*b*) ¿Con qué ángulo respecto al eje se mueve el electrón? (*c*) ¿A qué distancia del eje se encuentra el electrón cuando choca contra la pantalla fluorescente?

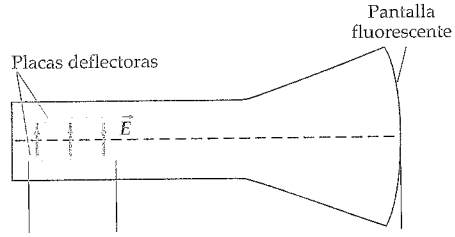


FIGURA 21.40 Problema 58

DIPOLOS

59 ○ Dos cargas puntuales $q_1 = 2{,}0$ pC y $q_1 = -2{,}0$ pC están separadas por una distancia de 4 mm. (*a*) ¿Cuál es el momento dipolar de este par de cargas? (*b*) Hacer un dibujo del par e indicar la dirección y sentido del momento dipolar.

60 ○ Un dipolo de momento $0{,}5\ e \cdot$ nm se coloca en el interior de un campo eléctrico uniforme de valor $4{,}0 \times 10^4$ N/C. ¿Cuál es el valor del momento ejercido sobre el dipolo cuando (*a*) el dipolo es paralelo al campo eléctrico, (*b*) el dipolo es perpendicular al campo eléctrico, y (*c*) el dipolo forma un ángulo de 30° con el campo eléctrico? (*d*) Determinar la energía potencial del dipolo en el campo eléctrico en cada caso.

PROBLEMAS GENERALES

61 ● Demostrar que solamente es posible colocar un único protón aislado en una taza de café vacía (asumir que el protón se fija en el fondo de la taza). Para ello, determinar a qué distancia de este protón deberíamos poner un segundo protón para que se mantuviera en equilibrio este último. Comparar esta distancia con la profundidad de una taza ordinaria de café para completar el razonamiento. SSM

62 ○○ Se colocan tres cargas puntuales de −5,00, +3,00 y 5,00 μC sobre el eje x en los puntos $x = -1{,}00$ cm, $x = 0$ y $x = +1$ cm, respectivamente. Calcular el campo eléctrico en el eje x para $x = 15$ cm. ¿Hay puntos en el eje x donde el módulo del campo eléctrico es cero? Si es así, ¿qué puntos son?

63 ○○ Se colocan dos cargas puntuales de −5 y +5 μC en el eje x, en los puntos $x = -1{,}00$ cm y $x = +1{,}00$ cm, respectivamente. (*a*) Calcular la intensidad del campo eléctrico en $x = 10{,}00$ cm. (*b*) Estimar la intensidad del campo eléctrico en $x = 10{,}00$ cm considerando el sistema de cargas como un dipolo localizado en el origen y usando la ecuación 21.10, $E = 2kp/|x|^3$. Comparar este resultado de (*b*) con el obtenido en (*a*) y explicar las razones de la diferencia entre ambos resultados.

64 ○○ Tres cargas, $+q$, $+2q$ y $+4q$, están conectadas por cuerdas del modo indicado en la figura 21.41. Determinar las tensiones T_1 y T_2.

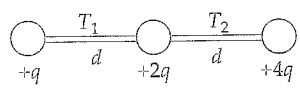


FIGURA 21.41 Problema 64

65 ○○ Una carga positiva Q ha de dividirse en dos cargas positivas q_1 y q_2. Demostrar que, para una separación dada D, la fuerza ejercida por una carga sobre la otra es máxima si $q_1 = q_2 = \frac{1}{2}Q$. SSM

66 ○○ Una carga Q está localizada en $x = 0$ y otra carga $4Q$ se encuentra en $x = 12{,}0$ cm. La fuerza ejercida sobre una carga de -2μC es cero si ésta se encuentra en $x = 4{,}0$ cm, y es 126,4 N en la dirección positiva de x si se sitúa en $x = 8{,}0$ cm. Determinar la carga Q.

67 ○○ Dos pequeñas esferas (cargas puntuales) separadas por una distancia de 0,60 m tienen una carga total de 200 μC. (*a*) Si las dos esferas se repelen entre sí con una fuerza de 80 N, ¿cuáles son las cargas de cada una de las esferas? (*b*) Si las dos esferas se atraen mutuamente con una fuerza de 80 N, ¿cuáles son las cargas de cada una de las esferas?

68 ○○ Una bola de carga conocida q y masa desconocida m, inicialmente en reposo, cae libremente desde una altura h en un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ dirigido verticalmente hacia abajo. La bola choca contra el suelo a una velocidad $v = 2\sqrt{gh}$. Determinar m en función de E, q y g.

69 ○○ Una barra rígida de 1 m de largo puede girar alrededor de un pivote colocado en su centro (figura 21.42). Se coloca una carga q_1 de 5×10^{-7} C en un extremo de la barra y, a una distancia $d = 10$ cm sobre la vertical y por debajo, se coloca otra carga q_2 igual en valor absoluto pero de signo opuesto. (*a*) ¿Cuál es la fuerza neta entre las dos cargas? (*b*) ¿Cuál es el momento de la fuerza con respecto al centro de la barra? (*c*) Como contrapeso de la fuerza de atracción entre las dos cargas se cuelga un bloque a 25 cm del pivote en el lado opuesto de las cargas, obteniéndose el equilibrio en la balanza. ¿Qué masa m deberá tener el bloque? (*d*) Si se coloca el bloque a 25 cm pero en el mismo brazo de la balanza que la carga, manteniéndose los mismos valores de q_1 y d, ¿qué nuevo valor deberá tener q_2 para mantener la balanza en equilibrio? SSM

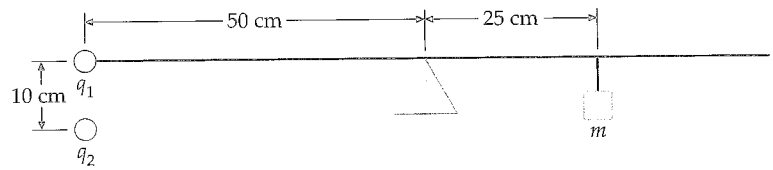


FIGURA 21.42 Problema 69

70 ○○ Dos cargas de 3,0 μC están localizadas en $x = 0$, $y = 2{,}0$ m y en $x = 0$, $y = -2{,}0$ m. Otras dos cargas Q están localizadas en $x = 4{,}0$ m, $y = 2{,}0$ m y en $x = 4{,}0$, $y = -2{,}0$ m (figura 21.43). El campo eléctrico en $x = 0$, $y = 0$ es $(4{,}0 \times 10^3\ \text{N/C})\hat{\imath}$. Determinar Q.

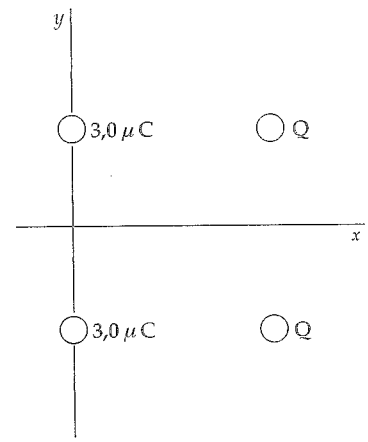


FIGURA 21.43 Problema 70

71 ○○ Dos cargas puntuales tienen una carga total igual a 200 μC y están separadas 0,600 m. (*a*) Determinar la carga de cada una si se repelen con una fuerza de 120 N. (*b*) Calcular la fuerza sobre cada carga si tienen cada una 100 μC. SSM

72 ○○ Dos cargas puntuales tienen una carga total igual a 200 μC y están separadas 0,600 m. (*a*) Determinar la carga de cada una si se atraen con una fuerza de 120 N. (*b*) Calcular la fuerza sobre cada carga si tienen cada una 100 μC. SSM

73 ○○ Una carga de $-3{,}0\ \mu$C está localizada en el origen; una segunda carga de 4,0 μC está localizada en $x = 0{,}2$ m, $y = 0$; y una tercera carga Q está situada en $x = 0{,}32$ m, $y = 0$. La fuerza que actúa sobre la carga de 4,0 μC es 240 N, en dirección x positiva. (*a*) Determinar la carga Q. (*b*) Con esta configuración de tres cargas, ¿en qué punto a lo largo de la dirección x el campo eléctrico es cero?

74 ●● Dos pequeñas esferas de masa m están suspendidas de un punto común mediante cuerdas de longitud L. Cuando cada una de las esferas tiene una carga q, cada cuerda forma un ángulo θ con la vertical, como indica la figura 21.44. (*a*) Demostrar que la carga q viene dada por $q = 2L \operatorname{sen}\theta\sqrt{(mg/k)\operatorname{tg}\theta}$ donde k es la constante de Coulomb. (*b*) Determinar q si $m = 10$ g, $L = 50$ cm y $\theta = 10°$.

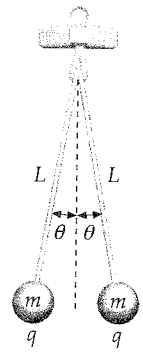


FIGURA 21.44
Problema 74

75 ●● (*a*) Supongamos que en el problema 74, $L = 1{,}5$ m, $m = 0{,}01$ kg y $q = 0{,}75$ mC. ¿Cuál es el ángulo que cada cuerda forma con la vertical? (*b*) Determinar el ángulo que cada cuerda forma con la vertical si una masa tiene una carga de 0,50 μC y la otra una carga de 1,0 μC.

76 ●● Cuatro cargas del mismo valor están dispuestas en los vértices de un cuadrado de lado L, según se ve en la figura 21.45. (*a*) Hallar el módulo, dirección y sentido de la fuerza ejercida sobre la carga situada en el vértice inferior izquierdo por las otras cargas. (*b*) Demostrar que el campo eléctrico debido a las cuatro cargas en el punto medio de uno de los lados del cuadro está dirigido a lo largo de dicho lado hacia la carga negativa y que su valor E es

$$E = k\frac{8q}{L^2}\left(1 - \frac{1}{5\sqrt{5}}\right).$$

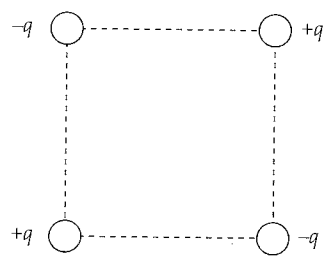


FIGURA 21.45 Problema 76

77 ●● La figura 21.46 muestra una palanqueta formada por dos masas idénticas m sujetas a los extremos de una barra delgada (sin masa) de longitud a con un pivote en su centro. Las masas transportan las cargas $+q$ y $-q$, y el sistema está localizado en un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$. Demostrar que para valores pequeños del ángulo θ entre la dirección del dipolo y el campo eléctrico, el sistema ejecuta un movimiento armónico simple y deducir la expresión del periodo de este movimiento. SSM

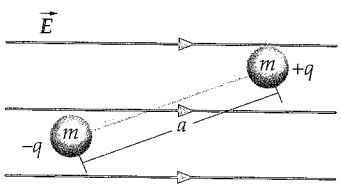


FIGURA 21.46
Problemas 77 y 78

78 ●● Para la palanqueta de la figura 21.46, sea $m = 0{,}02$ kg, $a = 0{,}3$ m y $\vec{E} = (600\ \text{N/C})\hat{\imath}$. Inicialmente, la palanqueta está en reposo y forma un ángulo de 60° con el eje x. Se deja entonces en libertad y cuando está momentáneamente alineada con el campo eléctrico, su energía cinética es 5×10^{-3} J. Determinar el módulo de Q.

79 ●● Un electrón (carga $-e$, masa m) y un positrón (carga $+e$, masa m) giran alrededor de su centro común de masas bajo la influencia de su fuerza atractiva de Coulomb. Determinar la velocidad v de cada partícula en función de e, m, k y su separación L. SSM

80 ●●● Se coloca un péndulo simple de 1,0 m de longitud y 5×10^{-3} kg de masa en un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ que se dirige verticalmente hacia arriba. La "lenteja" del péndulo tiene una carga de $-8{,}0$ μC. El periodo del péndulo es 1,2 s. Determinar el módulo y la dirección del campo eléctrico.

81 ●●● Una pequeña masa (puntual) m de carga q está restringida a moverse verticalmente dentro de un cilindro estrecho y sin rozamiento (figura 21.47). En el fondo del cilindro hay una masa puntual de carga Q de igual signo que q. (*a*) Demostrar que la masa m estará en equilibrio a una altura $y_0 = (kqQ/mg)^{1/2}$. (*b*) Demostrar que si la masa m es desplazada ligeramente de su posición de equilibrio y se deja en libertad ejecutará un movimiento armónico simple de frecuencia angular $\omega = (2g/y_0)^{1/2}$.

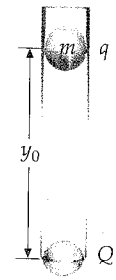


FIGURA 21.47
Problema 81

82 ●●● Dos moléculas polares neutras se atraen entre sí. Supongamos que cada una de ellas posee un momento dipolar $\vec{p}$ y que estos dipolos están alineados a lo largo del eje x y separados una distancia d. Deducir una expresión para la fuerza de atracción en función de p y d.

83 ●●● Dos cargas positivas iguales Q se encuentran sobre el eje x en $x = \frac{1}{2}a$ y $x = -\frac{1}{2}a$. (*a*) Obtener una expresión para el campo eléctrico en función de y sobre el eje y. (*b*) Una bolita de masa m, y carga q, se mueve sobre una barra delgada y sin rozamiento a lo largo del eje y. Determinar la fuerza que actúa sobre la carga q en función de y; determinar el signo q para que esta fuerza apunte siempre alejándose del origen. (*c*) La bolita esta inicialmente en reposo en el origen. Si se le da un pequeño impulso en la dirección $+y$, ¿cómo se moverá la bolita en el instante en el que la fuerza es máxima, considerando despreciable la fuerza gravitatoria?

84 ●●● Un núcleo de oro está a 100 fm (1 fm $= 10^{-15}$ m) de un protón en reposo. Cuando se libera el protón, adquiere una velocidad debida a la repulsión que le produce la carga del núcleo de oro. ¿Cuál es la velocidad del protón a grandes distancias (considerar que la distancia es infinita) del núcleo? (Asumir que el núcleo de oro permanece fijo.)

85 ●●● Durante el famoso experimento de Ernest Rutherford en 1919, se lanzaron núcleos de helio doblemente ionizados (las denominadas partículas α) contra una lámina de oro. Se descubrió que toda la masa de un átomo estaba prácticamente en el núcleo. Suponer que durante este experimento, una partícula α lejos de la lámina tiene una energía cinética de 5,0 MeV. Si se dirige la partícula α hacia un núcleo de oro de la lámina y la única fuerza que actúa sobre él es la fuerza eléctrica de repulsión entre la partícula y el núcleo de oro, ¿cuánto se acercará la partícula α al núcleo antes de retroceder debido a la repulsión entre ambos? Es decir, ¿cuál es la mínima separación entre las centros de la partícula α y el núcleo de oro? SSM

86 ●●● En el experimento de Millikan, que permite determinar la carga del electrón, una microesfera de poliestireno se carga y se deja caer libremente en el aire, interaccionando con un campo eléctrico vertical conocido. La microesfera se acelera en la dirección del campo hasta que alcanza la velocidad límite, de tal forma que su carga queda determinada por esta velocidad. En este experimento cada pequeña esfera tiene un radio de $5{,}5 \times 10^{-7}$ m y el campo tiene una intensidad de $E = 6 \times 10^4$ N/C. La fuerza de resistencia del aire sobre la esfera es $F_a = 6\pi\eta rv$, donde v es la velocidad la esfera, η la viscosidad del aire ($\eta = 1{,}8 \times 10^{-5}$ N · s/m^2), y la densidad del poliestireno es de $1{,}05 \times 10^3$ Kg/m^3. (*a*) Si el campo eléctrico está dirigido hacia abajo y la velocidad límite con la que sube la esfera es $v = 1{,}16 \times 10^{-4}$, ¿cuál es el valor de la carga de la esfera? (*b*) ¿Cuál es el exceso de electrones en la misma? (*c*) Si se cambia la dirección del campo, manteniendo su módulo, ¿cuál será la velocidad límite?

87 ●●● En el problema 86, se describe el experimento de Millikan con objeto de determinar la carga del electrón. En este experimento, mediante una fuente de alimentación (conmutable), se puede cambiar el sentido del campo eléctrico manteniendo su módulo, de tal forma que es posible medir las velocidades límites de la microesfera cuando éstas tienen, de forma alternada, el mismo sentido y el opuesto al de la fuerza de gravedad. Si v_a y v_d son las velocidades límite en sentido ascendente y descendente, respectivamente, y $v = v_a + v_d$, demostrar que $v = qE/(3\pi\eta r)$, donde q es la carga neta de la microesfera. ¿Qué ventajas aporta el método de medir las dos velocidades, v_a y v_d, con respecto al de medir una sola? Las variaciones de la velocidad v se producen en saltos discretos Δv, debido a que la carga está cuantificada. Utilizando los datos del problema 86, calcular Δv. SSM

CAPÍTULO 22

LOS RELÁMPAGOS SON FENÓMENOS ELÉCTRICOS. CUANDO SE PRODUCE UN RAYO, SE TRANSFIEREN CARGAS ENTRE LAS NUBES Y LA TIERRA. EL DESTELLO LUMINOSO SE PRODUCE PORQUE MOLÉCULAS DE AIRE QUE ESTABAN EN ESTADOS EXCITADOS CAEN A ESTADOS DE MÁS BAJA ENERGÍA. *(Photo Disc.)*

Campo eléctrico II: distribuciones continuas de carga

22.1 Cálculo del campo eléctrico $\vec{E}$ mediante la ley de Coulomb

22.2 Ley de Gauss

22.3 Cálculo del campo eléctrico $\vec{E}$ con la ley de Gauss utilizando la simetría

22.4 Discontinuidad de E_n

22.5 Carga y campo en la superficie de los conductores

*22.6 Equivalencia de la ley de Gauss y la ley de Coulomb en Electrostática

¿Cómo podríamos calcular la carga en la superficie de la Tierra? (Véase el ejemplo 22.15.)

A escala microscópica, la carga eléctrica está cuantificada. Sin embargo, con frecuencia se presentan situaciones en las que un gran número de cargas están tan próximas que la carga total puede considerarse distribuida en el espacio de forma continua. El concepto de densidad de carga continua para describir una distribución de un gran número de cargas discretas, es semejante al concepto de densidad de masa continua.

Además de distribuciones de carga continua, analizamos la importancia de la simetría en la determinación del campo eléctrico. Los avances matemáticos de Carl Friedrich Gauss demostraron que el campo eléctrico mantiene las propiedades simétricas. El conocimiento de las propiedades de simetría de las distribuciones de carga facilita en muchos casos la determinación del campo eléctrico que crean.

En este capítulo, veremos algunos ejemplos del uso de la ley de Coulomb para hallar el campo eléctrico debido a diversos tipos de distribuciones continuas de carga. Después, introduciremos la ley de Gauss, que relaciona el campo eléctrico que existe sobre una superficie cerrada con la carga neta incluida dentro de la superficie, y utilizaremos esta relación para calcular el campo eléctrico en ciertas distribuciones de carga que tienen un alto grado de simetría.

22.1 CÁLCULO DEL CAMPO ELÉCTRICO MEDIANTE LA LEY DE COULOMB

La figura 22.1 muestra un elemento de carga $dq = \rho\, dV$ suficientemente pequeño para que podamos considerarlo como una carga puntual. El elemento infinitesimal de carga dq es la cantidad de carga contenida en el volumen dV y ρ es la carga por unidad de volumen. El campo eléctrico $d\vec{E}$ en un punto del campo P debido a este elemento de carga viene dado por la ley de Coulomb:

$$d\vec{E} = dE_r\,\hat{r} = \frac{k\,dq}{r^2}\,\hat{r} \qquad 22.1a$$

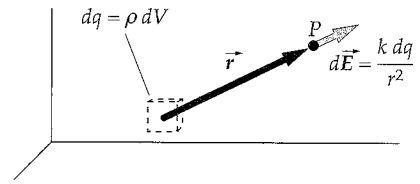


FIGURA 22.1 Un elemento de carga dq produce un campo $d\vec{E} = (k\,dq/r^2)\hat{r}$ en el punto P. El campo en P debido a la carga total se obtiene integrando esta expresión para toda la distribución de carga.

donde $\hat{r}$ es un vector unitario que apunta desde el elemento a dicho punto, y dE_r que es la componente de $d\vec{E}$ en la dirección de $\hat{r}$ viene dada por $k\,dq/r^2$. El campo total en P se determina integrando esta expresión para la distribución de la carga completa. Es decir,

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{k\hat{r}}{r^2}\,dq \qquad 22.1b$$

CAMPO ELÉCTRICO DEBIDO A UNA DISTRIBUCIÓN CONTINUA DE CARGA

Considerar distribuciones de carga continuas para describir un gran número de cargas puntuales es similar a la descripción del aire como una distribución de masa continua aunque se sabe que está constituido por moléculas. En ambos casos, se define un elemento de volumen ΔV que es suficientemente grande para contener gran cantidad de partículas cargadas pero suficientemente pequeño como para reemplazar ΔV por un diferencial de V, dV, usando el cálculo diferencial sin introducir error. Si la carga se distribuye en una línea o en una superficie, se utiliza $dq = \sigma\, dA$ o $dq = \lambda\, dL$ y se integra a toda la superficie o línea. (En estos casos, σ y λ son carga por unidad de área o longitud, respectivamente.) Normalmente, la integración se hace expresando $\hat{r}$ en coordenadas cartesianas e integrando componente a componente.

La componente x de $\hat{r}$ es $\hat{r} \cdot \hat{i} = \cos\theta$, donde θ es el ángulo entre $\hat{r}$ y $\hat{i}$.* La componente y y la componente z se calculan de forma similar.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Cálculo de $\vec{E}$ utilizando las fórmulas 22.1a y 22.1b

PLANTEAMIENTO Hacer un diagrama de la configuración de cargas junto con un punto genérico P denominado punto de campo que es donde se calcula el campo. Además, en este dibujo se señalará un incremento de carga dq en un punto arbitrario de la fuente de campo S.

SOLUCIÓN

1. Poner los ejes coordenados en el dibujo. Elegir los ejes considerando cualquier propiedad de simetría de la distribución de carga. Por ejemplo, si la carga se distribuye a lo largo de una línea recta, se selecciona esta línea como uno de los ejes. Se dibuja un segundo eje que pase por el punto P, se señala la distancia r entre los puntos P y S, y se define un vector unitario $\hat{r}$ cuya dirección va desde el punto S hacia el P.
2. Para calcular el campo eléctrico $\vec{E}$ usando la ecuación 22.1b, la expresión $d\vec{E} = dE_r\,\hat{r}$ se desarrolla por componentes. La componente x de $d\vec{E}$ es $dE_x = dE_r\,\hat{r} \cdot \hat{i} = dE_r \cos\theta$, donde θ es el ángulo entre $\hat{r}$ y $\hat{i}$ (ver figura 22.2) y la componente y de $d\vec{E}$ es $dE_y = dE_r\,\hat{r} \cdot \hat{j} = dE_r \operatorname{sen}\theta$.

* La componente de un vector en una dirección dada es igual al producto escalar del vector por el vector unidad en esta dirección. El producto escalar se analiza en la sección 6.3.

3. Expresar $\vec{E}$ en la ecuación 22.1*b* en términos de sus componentes x e y.

$$E_x = \int dE_x = \int dE_r \cos\theta = \int \frac{k\,dq}{r^2}\cos\theta$$

$$E_y = \int dE_y = \int dE_r \operatorname{sen}\theta = \int \frac{k\,dq}{r^2}\operatorname{sen}\theta$$

4. Para calcular E_x, expresar, según sea el caso, dq como $\rho\,dV$ o $\sigma\,dV$ o $\lambda\,dL$ e integrar. Para calcular E_y se sigue el mismo procedimiento que el usado para la componente x.
5. Los argumentos de simetría se utilizan para demostrar que una o más componentes de $\vec{E}$ son cero. (Por ejemplo, en 22.5 se usa un argumento de simetría para demostrar que $E_y = 0$.)

COMPROBACIÓN Si la distribución de carga se localiza en una región del espacio finita, la expresión del campo eléctrico en puntos alejados de la distribución de carga se considerará con respecto al centro de la distribución. Cuando existe simetría, la posición de dicho centro se determina por simple observación del dibujo.

Véase el **Apéndice de matemáticas** *para mayor información sobre* Trigonometría

Ejemplo 22.1 El campo eléctrico debido a una línea cargada de longitud finita

Determinar el campo eléctrico en un punto arbitrario P debido a un segmento recto de longitud L y carga Q uniformemente distribuida cuya densidad es Q/L.

PLANTEAMIENTO Se toma como eje x la recta que contiene a la varilla, la cual está entre $x = x_1$ y $x = x_2$, y se toma como eje y aquel que pasa por el punto P. Sea y la distancia radial de P al eje x. Se determina el campo $\vec{E}$ en P, calculado sus componentes por separado. Utilizando la ecuación 22.1, primero determinamos $d\vec{E}$ en P debido a un incremento arbitrario dq de la distribución de carga. A continuación, se calcula la integral de cada componente extendida al espacio de la distribución completa. Como Q está uniformemente distribuida, la densidad de carga lineal λ es Q/L.

SOLUCIÓN

1. Dibujar la configuración de la carga del sistema, un punto arbitrario P, el eje x conteniendo al segmento, y el eje y que pasa por el punto P. Señalar un incremento arbitrario de longitud centrado en un punto S del segmento (localizado en $x = x_S$) que tenga longitud dx_S y carga dq. Dibujar el vector $d\vec{E}$ suponiendo dq positivo (figura 22.2):

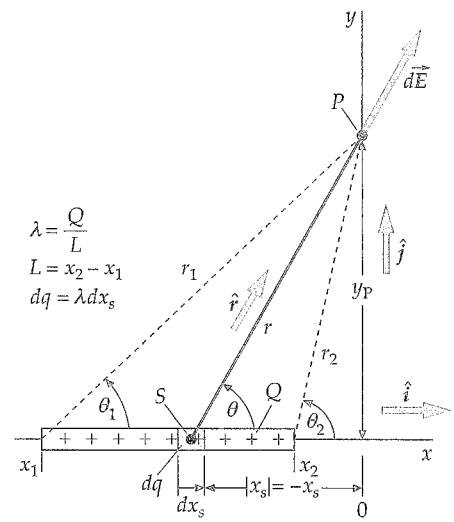


FIGURA 22.2 Geometría para el cálculo del campo eléctrico en un punto P creado por un segmento con densidad de carga lineal uniforme.

2. $\vec{E} = E_x\hat{i} + E_y\hat{j}$. Obtener las expresiones para dE_x y dE_y en términos de dE_r y θ, donde dE_r es la componente de $d\vec{E}$ en la dirección del vector que une S con P:

$$d\vec{E} = dE_r\,\hat{r}$$

entonces, tenemos que

$$dE_x = dE_r\,\hat{r}\cdot\hat{i} = dE_r\cos\theta$$

$$dE_y = dE_r\,\hat{r}\cdot\hat{j} = dE_r\operatorname{sen}\theta$$

3. Primero se resuelve E_x. Expresar dE_r usando la ecuación 21.1*a*, donde r es la distancia desde el punto fuente S hasta el punto P. En la figura 22.2 se puede ver que $\cos\theta = |x_S|/r = -x_S/r$. Además, se tiene que $dq = \lambda\,dx_S$:

$$dE_r = \frac{k\,dq}{r^2} \text{ y } \cos\theta = \frac{-x_S}{r}$$

entonces, tenemos que

$$dE_x = \frac{k\,dq}{r^2}\cos\theta = \frac{k\cos\theta\,\lambda\,dx_S}{r^2}$$

4. Integrar el resultado del paso 3:

$$dE_x = \int_{x_1}^{x_2}\frac{k\cos\theta\,\lambda\,dx_S}{r^2} = k\lambda\int_{x_1}^{x_2}\frac{\cos\theta\,dx_S}{r^2}$$

5. Hacer un cambio de variable, pasando de x_S a θ. A partir de la figura 22.2, hallar la relación entre x_S y θ y entre r y θ:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y_P}{|x_S|} = \frac{y_P}{-x_S}, \quad \text{por tanto,} \quad x_S = -\frac{y_P}{\operatorname{tg}\theta} = -y_P \cot\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y_P}{r}, \quad \text{por tanto,} \quad r = \frac{y_P}{\operatorname{sen}\theta}$$

6. Diferenciar el resultado del paso 5 para obtener la expresión de dx_S y tener presente que el punto P es fijo y, por tanto, y_P es constante:

$$dx_S = -y_P \frac{d\cot\theta}{d\theta} = y_P \csc^2\theta \, d\theta$$

7. Sustituir $y_P \csc^2\theta \, d\theta$ por dx_S e $y_P/\operatorname{sen}\theta$ por r en la integral del paso 4 y simplificar:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\cos\theta \, dx_S}{r^2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos\theta \, y_P \csc^2\theta \, d\theta}{y_P^2/\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{1}{y_P}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta \, d\theta \qquad (y_P \neq 0)$$

8. Resolver la integral y despejar E_x:

$$E_x = k\lambda \frac{1}{y_P}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta \, d\theta = \frac{k\lambda}{y_P}(\operatorname{sen}\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1) = \frac{k\lambda}{y_P}\left(\frac{y_P}{r_2} - \frac{y_P}{r_1}\right)$$

$$= k\lambda\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \qquad (r_1 > 0 \text{ y } r_2 > 0)$$

9. Se puede determinar E_y de forma análoga, con el método usado en los pasos 3-7 (ver el problema 22.21):

$$E_y = -\frac{k\lambda}{y_P}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) = -k\lambda\left(\frac{\cot\theta_2}{r_2} - \frac{\cot\theta_1}{r_1}\right) \qquad (y_P \neq 0)$$

y

$$E_y = 0 \qquad (y_P = 0)$$

10. Combinar los pasos 8 y 9 para obtener el campo eléctrico completo en P:

$$\vec{E} = \boxed{E_x\hat{\imath} + E_y\hat{\jmath}}$$

COMPROBACIÓN Considerar el plano perpendicular al segmento y que pasa por su centro. Por simetría vemos que el campo $E_x = 0$ en todos los puntos de este plano. En todos los puntos de este plano $r_1 = r_2$. El resultado del paso 8 da $E_x = 0$ si $r_1 = r_2$, como era de esperar.

OBSERVACIÓN La primera expresión de E_y del paso 9 es válida para cualquier punto en el plano xy menos en el eje x. Las dos cotangentes en la expresión de E_y son:

$$\cot\theta_1 = \frac{-x_1}{y_P} \quad \text{y} \quad \cot\theta_2 = \frac{-x_2}{y_P}$$

y ninguna de estas dos funciones tiene valor finito en el eje x, donde $y_P = 0$. La segunda expresión para E_y del paso 9 se obtiene usando la ecuación 22.1*a*. Considerando que, en el eje x, $\hat{r} = \pm\hat{\imath}$, podemos ver en la ecuación 22.1 que $d\vec{E} = \pm dE\hat{\imath}$, lo cual implica que $E_y = 0$.

PROBLEMA PRÁCTICO 22.1 Usar la expresión de E_x obtenida en el paso 8 para demostrar que $E_x > 0$ en todos los puntos del eje x para $x < x_2$.

El campo eléctrico en un punto P en el eje z debido a la varilla uniformemente cargada de la figura 22.3 viene dado por $\vec{E} = E_z\hat{k} + E_R\hat{R}$, donde

$$E_z = \frac{k\lambda}{R}(\operatorname{sen}\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1) = k\lambda\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \qquad (r_1 \neq 0) \text{ y } (r_2 \neq 0) \qquad 22.2a$$

$$E_R = -\frac{k\lambda}{R}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) = -k\lambda\left(\frac{\cot\theta_2}{r_2} - \frac{\cot\theta_1}{r_1}\right) \qquad (R \neq 0) \qquad 22.2b$$

Estas ecuaciones se pueden deducir del ejemplo 22.1. Las expresiones para E_z (ecuación 22.2*a*) son indefinidas en los extremos del segmento y las expresiones de E_R (ecuación 22.2*b*) son indefinidas en todos los puntos del eje z, donde $R = 0$. Sin embargo, $E_R = 0$ en todos los puntos en los que $R = 0$.

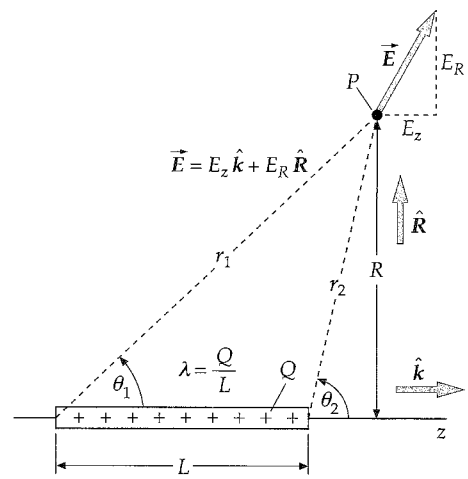


FIGURA 22.3 Campo eléctrico debido a una varilla fina uniformemente cargada.

Ejemplo 22.2 $\vec{E}$ producido por una línea cargada finita en puntos alejados de la carga

Sea una carga Q uniformemente distribuida a lo largo del eje z entre los puntos $z = -\frac{1}{2}L$ y $z = +\frac{1}{2}L$. Demostrar que para puntos del eje z alejados, la expresión del campo eléctrico se aproxima a la de una carga puntual Q colocada en el origen.

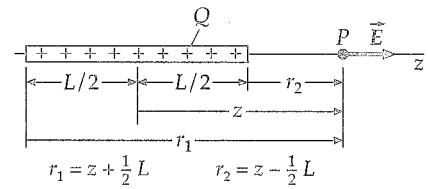


FIGURA 22.4 Geometría para el cálculo del campo eléctrico sobre el eje de una carga lineal uniforme de longitud L, carga Q y densidad de carga lineal $\lambda = Q/L$.

PLANTEAMIENTO Usar la ecuación 22.2*a* para demostrar que para valores grandes de z, la expresión del campo eléctrico del segmento de carga se aproxima al que crea una carga puntual colocada en el origen.

SOLUCIÓN

1. El campo eléctrico en el eje z tiene solamente la componente z, cuya expresión es la dada en la ecuación 22.2*a*:
$$E_z = k\lambda\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$
2. Dibujar el segmento cargado. Colocar en el eje z el punto P donde se calcula el campo, y señalar r_1 y r_2 (figura 22.4):
3. Sustituir $r_1 = z + \frac{1}{2}L$ y $r_2 = z - \frac{1}{2}L$ en el resultado del paso 1 y simplificar:
$$E_z = k\lambda\left(\frac{1}{z - \frac{1}{2}L} - \frac{1}{z + \frac{1}{2}L}\right) = \frac{kQ}{L}\frac{L}{z^2 - \left(\frac{1}{2}L\right)^2} = \frac{kQ}{z^2 - \left(\frac{1}{2}L\right)^2} \quad \left(z > \tfrac{1}{2}L\right)$$
4. Obtener una expresión aproximada para E_z cuando $z >> L$, para lo cual se desprecia $(\frac{1}{2}L)^2$ frente a z^2 en el resultado del paso 3:
$$\boxed{E_z \approx \frac{kQ}{z^2} \qquad (z \gg L)}$$

COMPROBACIÓN La expresión aproximada (paso 4) es inversamente proporcional al cuadrado de z, que es la distancia al origen. Esta expresión es la misma que la de una carga Q puntual que estuviera en el origen.

PROBLEMA PRÁCTICO 22.2 El resultado del paso 3 es válido para $L/2 > z > \infty$. ¿Es válido para $-L/2 < z < L/2$? Razonar la respuesta.

Ejemplo 22.3 $\vec{E}$ debido a una línea de carga infinita

Determinar el campo debido a una línea uniformemente cargada infinita en ambos sentidos y con una densidad de carga lineal λ.

PLANTEAMIENTO Una línea cargada infinita se considera infinita si las distancias entre los extremos de la distribución y el punto donde se considera el campo son mucho mayores que cualquiera de las distancias radiales dibujadas en la figura 22.2. Para calcular el campo eléctrico debido a la línea de carga, tomamos los límites para $x_1 \to -\infty$ y para $x_2 \to +\infty$. En la figura, vemos que debemos tomar límites para $\theta_1 \to 0$ y $\theta_2 \to \pi$ en las ecuaciones 22.2*a* y 22.2*b*.

SOLUCIÓN

1. Considerar la primera expresión del campo eléctrico en cada una de las ecuaciones 22.2*a* y 22.2*b*:
$$E_z = \frac{k\lambda}{R}(\operatorname{sen}\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1)$$
$$E_R = -\frac{k\lambda}{R}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$
2. Tomar límites para $\theta_1 \to 0$ y para $\theta_2 \to \pi$:
$$E_z = \frac{k\lambda}{R}(\operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen}0) = \frac{k\lambda}{R}(0 - 0) = 0$$
$$E_R = -\frac{k\lambda}{R}(\cos\pi - \cos 0) = -\frac{k\lambda}{R}(-1 - 1) = 2\frac{k\lambda}{R}$$
3. Expresar el campo eléctrico en forma vectorial:
$$\vec{E} = E_z\hat{k} + E_R\hat{R} = 0\hat{k} + \frac{2k\lambda}{R}\hat{R} = \boxed{\frac{2k\lambda}{R}\hat{R}}$$

COMPROBACIÓN El campo eléctrico en la dirección radial es tal como esperabamos; es así debido a la simetría. (La línea de carga es uniformemente distribuida y se extiende hasta el infinito en ambos sentidos.)

OBSERVACIÓN El módulo del campo eléctrico decrece inversamente con la distancia radial desde la línea de carga.

El campo eléctrico debido a una línea uniformemente cargada que se extiende hasta el infinito en ambas direcciones viene dado por

$$\vec{E} = \frac{2k\lambda}{R}\hat{R} \qquad 22.3$$

donde λ es la densidad lineal de carga, R es la distancia radial de la línea de carga al punto de campo y $\hat{R}$ es el vector unitario en la dirección radial. La ecuación 22.3 se obtiene en el ejemplo 22.3.

PROBLEMA PRÁCTICO 22.3

Demostrar que si k, λ y R se dan en unidades del SI, la ecuación 22.3 nos da el campo eléctrico en N/C.

La constante de Coulomb se suele escribir en términos de otra constante, ϵ_0, denominada, **permitividad eléctrica del vacío**.

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \qquad 22.4$$

Utilizando esta notación, la ley de Coulomb para $\vec{E}$ ecuación 21.7, se escribe

$$\vec{E} = k\frac{q}{r^2}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} \qquad 22.5$$

y $\vec{E}$ para una línea cargada infinita (equación 22.3) con densidad de carga lineal λ, se escribe

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{R}\hat{R} \qquad 22.6$$

El valor de ϵ_0 en unidades del SI es

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/(N \cdot m^2)} \qquad 22.7$$

Ejemplo 22.4 Aproximación de las ecuaciones 22.2*a* y 22.2*b* a un plano de simetría

Una carga Q está uniformemente distribuida a lo largo del eje z desde $z = -\frac{1}{2}L$ hasta $z = +\frac{1}{2}L$. (*a*) Hallar una expresión para el campo eléctrico en función de R en el plano $z = 0$, siendo R la distancia radial entre el punto en el que se desea calcular el campo y el eje z. (*b*) Demostrar que para $R >> L$, la expresión obtenida en la parte (*a*) se aproxima a la de una carga puntual colocada en el origen. (*c*) Demostrar que para $R << L$, la expresión del apartado (*a*) se aproxima a la de una línea de carga infinita ubicada en el eje z y con densidad lineal de carga $\lambda = Q/L$.

PLANTEAMIENTO La configuración de carga es la misma que la del ejemplo 22.2 y la densidad de carga es Q/L. Dibujar la línea de carga en el eje z y poner el punto campo en el plano $z = 0$. Entonces, las ecuaciones 22.2*a* y 22.2*b* permiten obtener la expresión del campo que se pide en el apartado (*a*). El campo eléctrico debido a una carga puntual decrece de forma inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la carga. Examinar el resultado de la parte (*a*) para ver cómo se aproxima aquél al de una carga puntual colocada en el origen para $R >> L$. El campo eléctrico debido a una línea de carga de longitud infinita decrece de forma inversamente proporcional a la distancia radial desde la línea (ecuación 22.3). Examinando el resultado de la parte (*a*) vemos cómo se aproxima la expresión a la de una línea de longitud infinita para $R << L$.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Elegir la primera expresión para el campo eléctrico en cada una de las ecuaciones 22.2*a* y 22.2*b*:

$$E_z = \frac{k\lambda}{R}(\operatorname{sen}\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1)$$

$$E_R = -\frac{k\lambda}{R}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

2. Dibujar la configuración del sistema con la línea cargada en el eje z desde $z = -\frac{1}{2}L$ hasta $z = +\frac{1}{2}L$. Colocar el punto P en el plano $z = 0$ a distancia R del origen (figura 22.5):

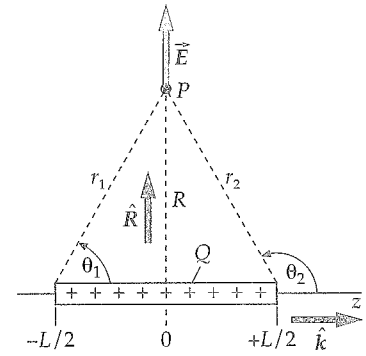


FIGURA 22.5

3. En esta figura se ve como $\theta_2 + \theta_1 = \pi$, de tal forma que $\operatorname{sen}\theta_2 = \operatorname{sen}(\pi - \theta_1) = \operatorname{sen}\theta_1$ y $\cos\theta_2 = \cos(\pi - \theta_1) = -\cos\theta_1$. Sustituir estos valores en el resultado del paso 1:

$$E_z = \frac{k\lambda}{R}(\operatorname{sen}\theta_1 - \operatorname{sen}\theta_1) = 0$$

$$E_R = -\frac{k\lambda}{R}(-\cos\theta_1 - \cos\theta_1) = \frac{2k\lambda}{R}\cos\theta_1$$

4. Expresar $\cos\theta_1$ en función de R y L y sustituir en el resultado del paso 3:

$$\cos\theta_1 = \frac{\frac{1}{2}L}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2}L\right)^2}}$$

entonces, tenemos

$$E_R = \frac{2k\lambda}{R}\frac{\frac{1}{2}L}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2}L\right)^2}} = \frac{k\lambda L}{R\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2}L\right)^2}}$$

5. Expresar el campo eléctrico en forma vectorial y sustituir Q por λL:

$$\vec{E} = E_z\hat{k} + E_R\hat{R} = 0\hat{k} + E_R\hat{R}$$

entonces, tenemos $\vec{E} = E_R\hat{R} = \boxed{\dfrac{kQ}{R\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2}L\right)^2}}\hat{R}}$

(*b*) 1. Observar el resultado del paso 5. Si $R \gg L$, entonces $R^2 + (\frac{1}{2}L)^2 \approx R^2$. Sustituir R^2 por $R^2 + (\frac{1}{2}L)^2$:

$$\vec{E} \approx \frac{kQ}{R\sqrt{R^2}}\hat{R} = \frac{kQ}{R^2}\hat{R} \qquad (R \gg L)$$

2. En esta expresión aproximada vemos que el campo eléctrico decrece de forma inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al origen, tal como ocurre con el campo de una carga puntual:

$$\vec{E} \approx \boxed{\frac{kQ}{R^2}\hat{R} \qquad (R \gg L)}$$

(*c*) 1. Observar el resultado del paso 5 de la parte (*a*). Si $R \ll L$, entonces $R^2 + (\frac{1}{2}L)^2 \approx (\frac{1}{2}L)^2$. Sustituir $(\frac{1}{2}L)^2$ por $R^2 + (\frac{1}{2}L)^2$. En esta expresión aproximada vemos que el campo eléctrico varía con la inversa de la distancia radial desde la línea de carga, tal como lo hace la línea infinita de carga (ecuacion 22.3):

$$\vec{E} \approx \frac{k\lambda L}{R\sqrt{\left(\frac{1}{2}L\right)^2}}\hat{R} = \boxed{\frac{2k\lambda}{R}\hat{R}} \qquad (R \ll L)$$

COMPROBACIÓN Los apartados (*b*) y (*c*) demuestran que el resultado del apartado (*a*) es plausible. Así, hemos visto que el resultado del apartado (*a*) es válido en los casos extremos en que $R \gg L$ y $R \ll L$.

OBSERVACIÓN La figura 22.6 muestra el resultado exacto para la línea de carga de longitud $L = 10$ cm y una densidad de carga $\lambda = 4{,}5$ nC/m. Tambien muestra esta figura los casos límite de una línea de carga infinita con la misma densidad de carga y una carga puntual $Q = \lambda L$.

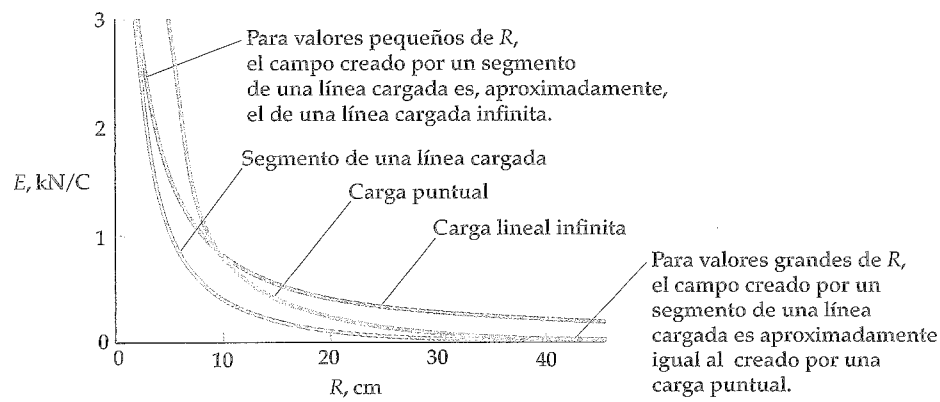
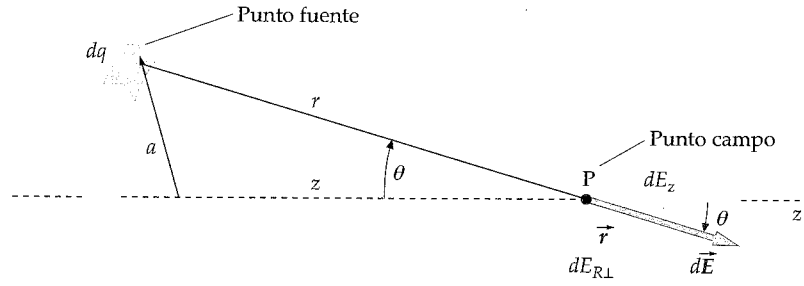


FIGURA 22.6 Representación del módulo del campo eléctrico, en función de la distancia, generado por un segmento de línea cargada de 10 cm de largo, una carga puntual y una línea infinita de carga.

Ejemplo 22.5 $\vec{E}$ en el eje de un anillo cargado

Un anillo (una circunferencia) fino de radio a está uniformemente cargado con una carga total Q. Determinar el campo eléctrico debido a la carga en los puntos del eje perpendicular al plano y que atraviesa el centro del anillo.

PLANTEAMIENTO Comenzamos con $d\vec{E} = (k\,dq/r^2)\hat{r}$ (ecuación 22.1a), para calcular el campo eléctrico en un punto arbitrario del eje. Dibujar el anillo cargado. Consideramos que el eje z coincide con el eje del anillo que se encuentra en el plano $z = 0$. Indicamos el punto de campo P y un punto fuente S en el anillo.



(a)

SOLUCIÓN

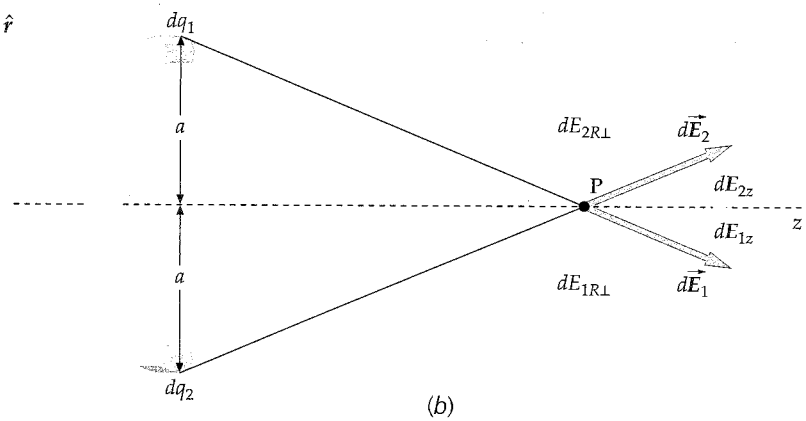
1. Escribir la ecuación 22.1a, expresando el campo creado por el elemento de carga dq:

$$d\vec{E} = \frac{k\,dq}{r^2}\hat{r}$$

2. Dibujar el anillo (figura 22.7a) y su eje (eje z). Mostrar el vector campo eléctrico en el punto P debido a la carga dq localizada en el punto fuente S:

3. Dibujar el anillo (figura 22.7b) y mostrar las componentes axial y radial de $\vec{E}$ para idénticos elementos en lugares opuestos del anillo. La componente radial se cancela en cada par de elementos dq, de tal forma que no queda más que la componente axial:

$$E_R = 0$$



(b)

FIGURA 22.7 (a) Anillo cargado de radio a. El campo eléctrico en el punto P del eje x debido al elemento de carga dq posee una componente a lo largo del eje x y otra perpendicular a ese mismo eje. (b) Para cada elemento de carga dq_1 existe otro elemento simétrico dq_2, de tal forma que la suma de las componentes del campo perpendiculares al eje x, generadas por todos los elementos del anillo, es cero.

4. Expresar la componente z del campo eléctrico a partir del resultado del paso 1:

$$dE_z = \frac{k\,dq}{r^2}\cos\theta = \frac{k\,dq}{r^2}\frac{z}{r} = \frac{k\,dq\,z}{r^3}$$

5. Integrar ambos términos de la igualdad:

$$E_z = \int \frac{kz\,dq}{r^3} = \frac{kz}{r^3}\int dq = \frac{kz}{r^3}Q$$

6. Usando el teorema de Pitágoras, se obtiene $r = \sqrt{z^2 + a^2}$:

$$\vec{E} = E_z\hat{k} + E_R\hat{R} = E_z\hat{k} + 0 = \boxed{\frac{kQz}{(z^2 + a^2)^{3/2}}\hat{k}}$$

COMPROBACIÓN Sería lógico que la dirección del campo eléctrico en puntos del eje z esté dirigido alejándose del origen para $Q > 0$. El resultado del paso 6 coincide con lo esperado considerando que z es positivo para $+z$ y negativo para $-z$. Además, para $z >> a$, podemos esperar que E decrezca inversamente con el cuadrado de la distancia desde el origen. El resultado del paso 6 coincide con lo esperado, puesto que da el resultado de $E_z \approx kQ/z^2$ si a^2 es despreciable frente a z^2.

PROBLEMA PRÁCTICO 22.4 En la figura 22.8, se representa gráficamente E_z versus z a lo largo del eje. Determinar el punto en el eje del anillo donde E_z es máximo. *Ayuda: $dE_z/dz = 0$, donde E_z es máximo.*

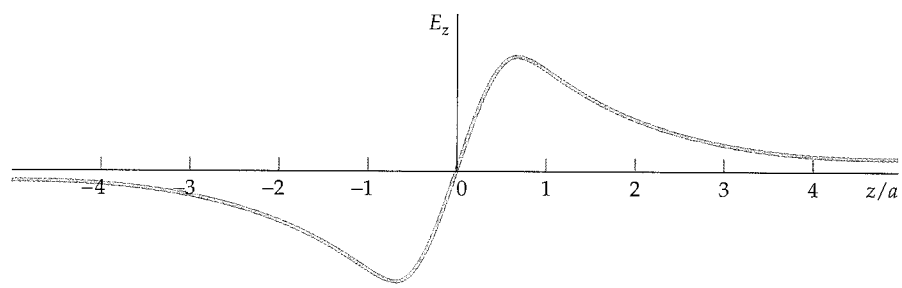


FIGURA 22.8

$\vec{E}$ en el eje de un anillo cargado — Conceptual

En el ejemplo del anillo 22.5, ¿por qué el módulo del campo eléctrico es más pequeño cerca del origen, incluso aunque éste se sitúe próximo al anillo, que en cualquier otro punto del eje z (ver figura 22.9)?

PLANTEAMIENTO La clave de la solución de este problema se encuentra en la figura 22.7*b*. Volver a dibujar esta figura con el punto campo P en el eje z y cerca del origen.

SOLUCIÓN

1. Volver a dibujar la figura 22.7*b* con el punto en el que se calcula el campo cerca del origen:
2. Los campos cerca del origen debidos a cada uno de los elementos simétricos son grandes pero de igual módulo y direcciones casi opuestas, de tal forma que la suma es casi cero:

Cerca del origen, el campo resultante es pequeño y axial.

COMPROBACIÓN En el origen, los dos campos eléctricos son grandes, pero opuestos, y su suma es, por lo tanto, cero. Lejos del origen ($|z| \gg a$), los dos campos eléctricos (figura 22.7*b*) son casi de la misma dirección y, en consecuencia, su suma no es cero.

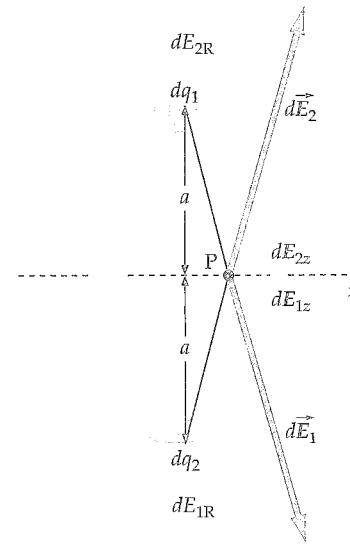


FIGURA 22.9

El campo eléctrico en el eje debido a una carga uniformemente distribuida en un anillo circular de radio a y carga total Q viene dado por $\vec{E} = E_z\hat{k}$, donde

$$E_z = \frac{kQz}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \qquad 22.8$$

La ecuación 22.8 se deduce en el ejemplo 22.5.

Véase el **Apéndice de matemáticas** *para más información sobre* Expansión binomial

Ejemplo 22.7 $\vec{E}$ en el eje de un disco cargado

Considerar un disco uniformemente cargado de radio b y densidad superficial de carga σ. (*a*) Determinar el campo eléctrico en todos los puntos del eje del disco. (*b*) Demostrar que para puntos del eje lejanos al disco, el campo eléctrico se aproxima al generado por una carga puntual igual a la del disco colocada en el origen. (*c*) Demostrar que para un disco uniformemente cargado de radio infinito, el campo eléctrico es uniforme a través de la región en cualquier semiespacio a ambos lados del disco.

PLANTEAMIENTO Calcular el campo en el eje del disco considerando el disco como un conjunto de anillos concéntricos uniformemente cargados.

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Calcular el campo en el eje del disco considerando el disco como un conjunto de anillos concéntricos de carga. El campo de un anillo uniformemente cargado con carga Q y radio a se muestra en la ecuación 22.8:

$$\vec{E} = E_z\hat{k}, \text{ donde } E_z = \frac{kQz}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

2. Dibujar el disco (figura 22.10) y el campo eléctrico $d\vec{E}$ en su eje debido a un anillo elemental de carga dq, radio a y anchura da:

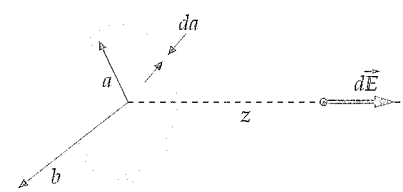


FIGURA 22.10 Un disco cargado uniformemente puede considerarse como una serie de cargas anulares de radio a.

3. Sustituir dq por Q y dE_z por E_z en el resultado del paso 1. Integrar ambos lados de la igualdad para calcular el campo resultante correspondiente al disco entero. El punto donde calculamos el campo es fijo, de tal forma que z es constante:

$$dE_z = \frac{kzdq}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$\text{entonces, } E_z = \int \frac{kzdq}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = kz\int \frac{dq}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

4. Para resolver esta integral, hacemos un cambio de variable de q por a. La carga $dq = \sigma\, dA$, donde $dA = 2\pi a\, da$ es el área de un anillo de radio a y anchura da:

$$dq = \sigma\, dA = \sigma 2\pi a da$$

así, tenemos que $E_z = \pi k z \sigma \int_0^b \frac{2ada}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = \pi k z \sigma \int_{z^2+0^2}^{z^2+b^2} u^{-3/2}\, du$

donde $u = z^2 + a^2$; por tanto, $du = 2ada$

5. Resolver la integral y simplificar el resultado:

$$E_z = \pi k z \sigma \frac{u^{-1/2}}{-\frac{1}{2}}\Bigg|_{z^2}^{z^2+b^2} = -2\pi k z \sigma \left(\frac{1}{\sqrt{z^2 + b^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2}}\right)$$

$$= \boxed{\text{sign}(z) \cdot 2\pi k \sigma \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{z^2}}}\right)}$$

donde sign$(z) = z/|z|$. Por definición*:

$$\text{sign}(z) = \begin{cases} +1 & z > 0 \\ 0 & z = 0 \\ -1 & z < 0 \end{cases}$$

(*b*) 1. Para $z >> b$ (en el eje del disco) el campo eléctrico decrece inversamente con z^2. Para demostrar esto se usa la expansión binomial:

El primer orden de la expansión binomial es: $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ para $|x| \ll 1$.

2. Aplicar la expansión binomial al resultado del paso 5:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{z^2}}} = \left(1 + \frac{b^2}{z^2}\right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{b^2}{z^2} \qquad z^2 \gg b^2$$

3. Sustituir en el resultado del paso 5 y simplificar. (Para $z \gg b$, sign $(z) = 1$.) Así, la expresión aproximada para el campo en puntos que cumplen $z >> b$ es la misma que el de una carga puntual $Q = \sigma\pi b^2$ colocada en el origen.

$$E_z \approx 2\pi k \sigma \left(1 - \left[1 - \frac{1}{2}\frac{b^2}{z^2}\right]\right) = 2\pi k \sigma \frac{1}{2}\frac{b^2}{z^2} = \boxed{\frac{kQ}{z^2}} \qquad z \gg b$$

donde $Q = \sigma\pi b^2$

(*c*) 1. Tomar límites en el resultado del paso 5 de la parte (*a*) cuando $b \to \infty$. Este resultado es una expresión para E_z que es uniforme, tanto en la región de $z > 0$ como en la de $z < 0$:

$$E_z = \text{sign}(z) \cdot 2\pi k \sigma \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \infty}}\right) = \boxed{\text{sign}(z) \cdot 2\pi k \sigma}$$

COMPROBACIÓN El campo eléctrico debería ser de dirección opuesta en cada lado del disco. El resultado del paso 5 de la parte (*a*) concuerda con lo esperado.

OBSERVACIÓN Según el resultado de la parte (*c*), el campo eléctrico es discontinuo para $z = 0$ (figura 22.11) donde el campo da un salto desde $-2\pi k\sigma\hat{\imath}$ a $+2\pi k\sigma\hat{\imath}$ cuando se cruza el plano $z = 0$. Hay, en consecuencia, una discontinuidad en E_z con un salto de $4\pi k\sigma = \sigma/\epsilon_0$.

PROBLEMA PRÁCTICO 22.5 El campo eléctrico debido a una carga superficicial uniforme en el plano completo $z = 0$ se da en el resultado de la parte (*c*). ¿Qué fracción del campo en el eje z para $z = a$ se debe a la carga superficial dentro del círculo que tiene un radio $r = 5a$ centrado en el origen? *Sugerencia: dividir el resultado del paso 5 de la parte (a) por el resultado de la parte (c) y después sustituir* 5a *por* r *y* a *por* z.

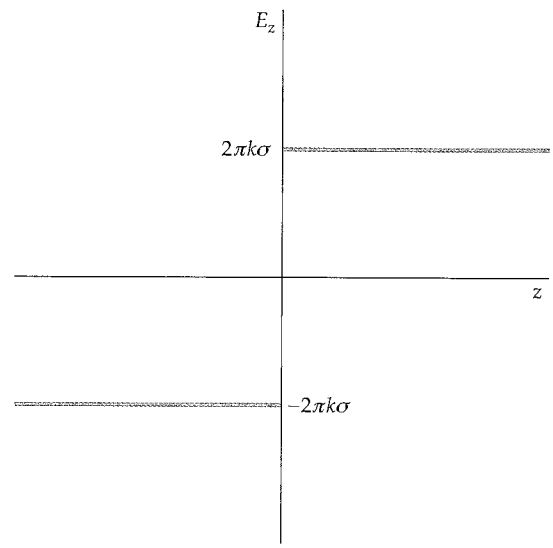


FIGURA 22.11 Gráfico que muestra la discontinuidad de $\vec{E}$ en un plano cargado. ¿En qué se parecen este gráfico y el de la figura 22.8?

* Tanto el programa Excel como el Mathematica utilizan la definición de la función "sign" propuesta aquí. La compañía Texas Instruments, sin embargo, usa la definición de la función "sign" de la siguiente forma: sign(0) =.±1, en lugar de 0.

La respuesta al problema 22.5 no depende de a sino de $r/a = 5$. El 80% del campo a una distancia a desde un plano con carga superficial uniformemente cargada es debido a la carga dentro de un círculo cuyo radio es igual a $5a$ multiplicado por la distancia.

La fórmula para el campo eléctrico en el eje x de un disco uniformemente cargado, obtenida en el ejemplo 22.7, es

$$E_z = \text{sign}(z) \cdot 2\pi k\sigma \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}}} \right) \qquad 22.9$$

CAMPO ELÉCTRICO EN EL EJE DE UN DISCO CON CARGA DISTRIBUIDA UNIFORMEMENTE

donde sign(z) se define en el paso 5 del apartado (a) del ejemplo 22.7 y R es el radio del disco. El campo de un plano uniformemente cargado se obtiene a partir de la ecuación 22.9 haciendo que el límite R/z tienda a infinito. Entonces

$$E_z = \text{sign}(z) \cdot 2\pi k\sigma = \text{sign}(z) \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \qquad 22.10$$

CAMPO ELÉCTRICO DE UNA CARGA DISTRIBUIDA UNIFORMEMENTE EN UN PLANO

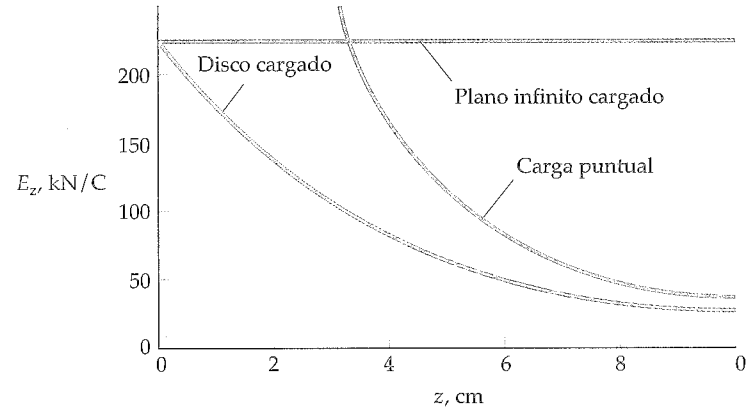


FIGURA 22.12 Un disco y un punto tienen cargas iguales, y un plano infinito y el disco tienen iguales densidades de carga uniformes. Obsérvese que el campo debido al disco tiende al de una carga puntual a grandes distancias y es igual al de un plano infinito cargado en el límite cuando z tiende a 0.

La figura 22.12 muestra el campo eléctrico debido a una carga puntual, un disco con carga uniforme y un plano infinito cargado, todo ello en función de la posición.

Según varía z sobre el eje, el campo eléctrico sufre un salto desde $-2\pi k\sigma\hat{\imath}$ a $+2\pi k\sigma\hat{\imath}$ cuando se atraviesa el plano $z = 0$ (figura 22.11). Así, para $z = 0$, hay una discontinuidad en E_z cuyo salto es $4\pi k\sigma$.

Ejemplo 22.8 Campo eléctrico debido a dos planos infinitos

En la figura 22.13, un plano infinito que está en $z = 0{,}00$ m tiene densidad superficial de carga $\sigma = +4{,}5\ \text{nC/m}^2$ y otro con densidad $\sigma = -4{,}50\ \text{nC/m}^2$ en $z = 2{,}00$ m. Determinar el campo eléctrico en (a) $x = 1{,}80$ m y en (b) $x = 5{,}00$ m.

PLANTEAMIENTO Cada plano cargado produce un campo cuyo módulo es $E = \sigma/(2\epsilon_0)$. Usamos el teorema de superposición para determinar el campo total. Entre los planos, el módulo del campo es σ/ϵ_0 y su dirección la de las x positivas. Para $x > 2{,}00$ y $x < 0$, los dos campos son de igual módulo y direcciones opuestas, por lo que la suma es cero.

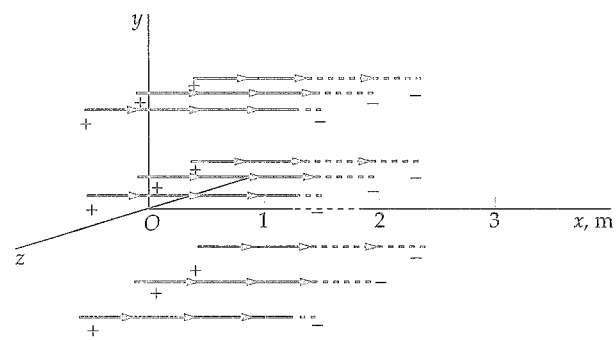


FIGURA 22.13

SOLUCIÓN

(a) 1. Calcular el módulo del campo producido por cada plano:

$$E = |\sigma|/(2\epsilon_0) = (4{,}50 \times 10^{-9}\ \text{N/C})/(2 \cdot 8{,}85 \times 10^{-12}) = 254\ \text{N/C}$$

2. En $x = 1{,}80$ m, entre los planos, el campo generado por cada plano tiene la dirección de la x positivas:

$$E_{x\,\text{neto}} = E_1 + E_2 = 254\ \text{N/C} + 254\ \text{N/C} = \boxed{508\ \text{N/C}}$$

(*b*) En $x = 5{,}00$ m, los campos debidos a cada uno de los dos planos son opuestos: $E_{x\,\text{neto}} = E_1 - E_2 = \boxed{0{,}00\ \text{N/C}}$

COMPROBACIÓN Como los dos planos tienen cargas de igual valor absoluto y distinto signo, las líneas de campo eléctrico se originan en el plano de carga positiva y acaban en el de carga negativa. $\vec{E}$ es cero en todos los puntos excepto en la región entre los dos planos.

OBSERVACIÓN Obsérvese que $E_{x\,\text{neto}} = 508$ N/C no sólo para $x = 1{,}8$ m sino en cualquier punto entre los dos planos. La configuración de carga en este ejemplo es la de un condensador, como el que se analiza en el capítulo 24.

22.2 LEY DE GAUSS

La descripción cualitativa del campo eléctrico mediante las líneas de fuerza estudiadas en el capítulo 21 está relacionada con una ecuación matemática llamada ley de Gauss. La ley de Gauss es una de las ecuaciones de Maxwell, las ecuaciones fundamentales del electromagnetismo, que veremos en el capítulo 30. Para cargas estáticas, la ley de Gauss y la ley de Coulomb son equivalentes. La ley de Gauss permite calcular fácilmente los campos eléctricos que resultan de distribuciones simétricas de carga, tales como una corteza esférica o una línea infinita. En esta sección, se presenta una argumentación sencilla de la ley de Gauss basada en las propiedades de las líneas de campo eléctrico. En la sección 22.6, se ofrece una deducción más rigurosa de la ley de Gauss.

Se entiende por superficie cerrada aquella que divide el espacio en dos regiones diferentes, la interior y la exterior a dicha superficie. La figura 22.14 muestra una superficie de forma arbitraria que encierra un dipolo. El número de líneas de campo eléctrico que salen de la carga positiva y cruzan la superficie, saliendo del espacio limitado por ésta, depende de donde se dibuje la superficie, pero toda línea que cruza la superficie para salir la vuelve a cruzar para entrar. Para contar el número neto de líneas que salen de la superficie, cuéntese cualquier línea que la cruce desde el interior como +1 y cualquier penetración desde el exterior como −1. Así pues, para la superficie indicada (figura 22.14), el balance total de líneas que cruzan la superficie es cero. Para superficies que encierran otras distribuciones de carga, como ocurre en la figura 22.15, *el número neto de líneas que sale por cualquier superficie que encierra las cargas es proporcional a la carga encerrada dentro de dicha superficie. Este es un enunciado cualitativo de la ley de Gauss.*

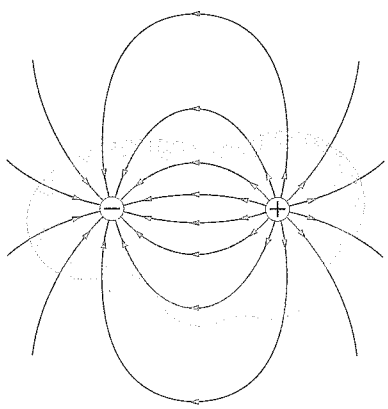


FIGURA 22.14 Dipolo eléctrico encerrado en una superficie de forma arbitraria. El número de líneas que abandonan la superficie es exactamente igual al número de líneas que entran en ella sin que importe donde se dibuje la superficie, siempre que se encierren dentro de ella ambas cargas del dipolo.

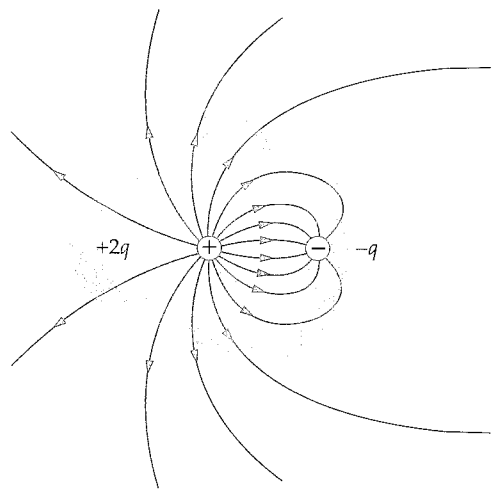


FIGURA 22.15 Superficie de forma arbitraria que incluye las cargas $+2q$ y $-q$. Las líneas de campo que terminan en $-q$ o bien no pasan a través de la superficie o bien salen y vuelven a entrar. El número neto de líneas que salen y no vuelven a entrar, el mismo que correspondería a una sola carga $+q$, es proporcional a la carga neta dentro de la superficie.

FLUJO ELÉCTRICO

La magnitud matemática que está relacionada con el número de líneas de campo que atraviesa una superficie se llama **flujo eléctrico**, ϕ. Para una superficie perpendicular a $\vec{E}$ (figura 22.16), se define como el producto del módulo del campo E y el área A:

$$\phi = EA$$

Las unidades del flujo son $N \cdot m^2/C$. Como el campo eléctrico es proporcional al número de líneas por unidad de área, el flujo eléctrico es proporcional al número de líneas de campo que atraviesan el área.

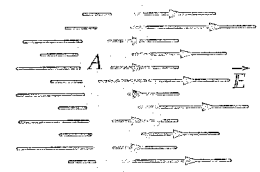


FIGURA 22.16 Líneas de campo correspondientes a un campo eléctrico uniforme E que atraviesa un área A perpendicular al campo. El producto EA es el flujo ϕ a través del área.

En la figura 22.17, la superficie de área A_2 no es perpendicular al campo eléctrico $\vec{E}$. Sin embargo, el número de líneas que atraviesan el área A_2 es el mismo que el que atraviesa el área A_1, que es perpendicular a $\vec{E}$. Las áreas están relacionadas por

$$A_2 \cos\theta = A_1 \qquad 22.11$$

donde θ es el ángulo existente entre $\vec{E}$ y el vector unitario $\hat{n}$ perpendicular a la superficie A_2, según está indicado. El flujo a través de una superficie viene definido por

$$\phi = \vec{E} \cdot \hat{n}A = EA\cos\theta = E_n A \qquad 22.12$$

donde $E_n = \vec{E} \cdot \hat{n}$ es la componente de $\vec{E}$ perpendicular, o normal, a la superficie.

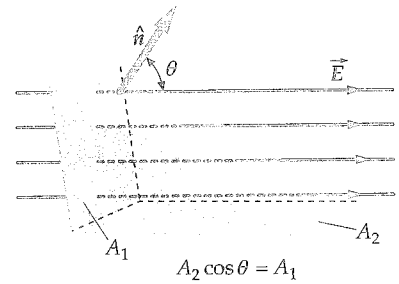


FIGURA 22.17 Líneas de campo correspondientes a un campo eléctrico uniforme perpendicular al área A_1, pero que forma un ángulo θ con el vector unitario $\hat{n}$ normal al área A_2. Cuando $\vec{E}$ no es perpendicular al área, el flujo a través del área es $E_n A$, siendo $E_n = E\cos\theta$ la componente de $\vec{E}$ perpendicular al área. El flujo que atraviesa A_2 es el mismo que el que pasa por A_1.

La figura 22.18 muestra una superficie de forma arbitraria sobre la cual el campo $\vec{E}$ puede variar. Si el área ΔA_i del elemento de área que elegimos es suficientemente pequeño, podemos considerarlo como un plano y la variación del campo eléctrico a través del elemento puede despreciarse. Entonces, el flujo del campo eléctrico a través de este elemento es

$$\Delta\phi_i = E_{ni}\,\Delta A_i = \vec{E}_i \cdot \hat{n}_i\,\Delta A_i$$

donde $\hat{n}_i$ es el vector unitario perpendicular al elemento de área y $\vec{E}_i$ el campo eléctrico en todo este elemento de área. Si la superficie es curva, los vectores unitarios de los distintos elementos tendrán direcciones diferentes. El flujo total a través de la superficie es la suma de $\Delta\phi_i$ extendida a todos los elementos. En el límite, cuando el número de elementos se aproxima a infinito y el área de cada elemento tiende a cero, esta suma se convierte en una integral. La definición general del flujo eléctrico es, por lo tanto,

$$\phi = \lim_{\Delta A_i \to 0} \sum_i \vec{E}_i \cdot \hat{n}_i\,\Delta A_i = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n}\,dA \qquad 22.13$$

DEFINICIÓN: FLUJO ELÉCTRICO

donde el índice S nos recuerda que estamos integrando sobre una superficie.* El signo del flujo depende de la elección que hagamos de la dirección del vector unitario perpendicular al elemento de superficie $\hat{n}$. Eligiendo $\hat{n}$ dirigido hacia el exterior de la superficie, podemos determinar el signo de $\vec{E} \cdot \hat{n}$, así como el signo del flujo a través de la superficie.

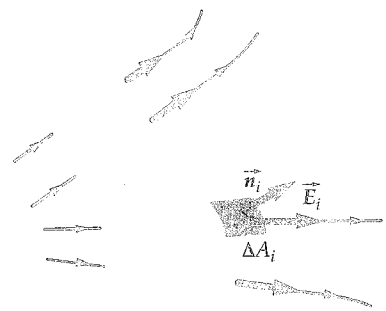


FIGURA 22.18 Cuando $\vec{E}$ varía en los distintos lugares de la superficie, ya sea porque E varía o porque lo hace el ángulo entre $\vec{E}$ y $\hat{n}$, el área se divide en elementos de área pequeños ΔA_i. El flujo a través del área se calcula sumando $\vec{E}_i \cdot \hat{n}_i\,\Delta A_i$ para todos los elementos.

En el caso del flujo del campo eléctrico a través de las superficies cerradas, existe el convenio de tomar siempre el vector unitario, $\hat{n}$, dirigido hacia el exterior de la superficie en cada punto de ésta. La integral extendida a toda la superficie se indica con el símbolo $\oint$. En consecuencia, el flujo neto total a través de la superficie cerrada S es

$$\phi_{\text{neto}} = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\,dA = \oint_S E_n\,dA \qquad 22.14$$

* El flujo eléctrico de un vector a través de una superficie es una operación matemática que se utiliza de forma similar para describir las velocidades de flujo de los fluidos y de la transferencia de calor. Además, se usa para relacionar el campo eléctrico con las cargas que lo producen.

El flujo total o neto ϕ_{neto} a través de la superficie cerrada es positivo o negativo dependiendo de que $\vec{E}$ esté dirigido predominantemente hacia fuera o hacia dentro de la superficie. En los puntos de la superficie en que $\vec{E}$ está dirigido hacia dentro, E_n es negativo.

ENUNCIADO CUANTITATIVO DE LA LEY DE GAUSS

La figura 22.19 muestra una superficie esférica de radio R con su centro en la carga puntual Q. El campo eléctrico en un punto cualquiera de la superficie es perpendicular a la superficie y tiene el módulo

$$E_n = \frac{kQ}{R^2}$$

El flujo neto de $\vec{E}$ a través de esta superficie esférica es

$$\phi_{\text{neto}} = \oint_S E_n \, dA = E_n \oint_S dA$$

donde E_n puede salir de la integral por ser constante en todos los puntos. La integral de dA extendida a toda la superficie es precisamente el área total, igual a $4\pi R^2$. Con este valor y sustituyendo kQ/R^2 por E_n, se obtiene

$$\phi_{\text{neto}} = \frac{kQ}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi kQ = Q/\epsilon_0 \qquad 22.15$$

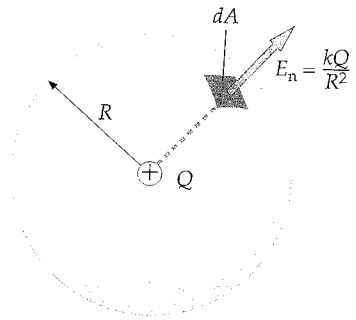


FIGURA 22.19 Una superficie esférica que incluye la carga puntual Q. El flujo se calcula fácilmente para una superficie esférica. Es igual al producto de E_n por el área superficial, es decir, $E_n \, 4\pi R^2$.

Así pues, el flujo neto a través de una superficie esférica con una carga puntual en el centro es independiente del radio de la esfera y es igual a $4\pi k$ veces el valor de dicha carga. Esto concuerda con nuestra observación previa según la cual el número neto de líneas que atraviesan una superficie es proporcional a la carga neta interior a la superficie. Este número de líneas es el mismo para cualquier superficie que encierre a la carga, cualquiera que sea su forma. Así, el flujo neto a través de cualquier superficie que rodea a una carga puntual Q es igual a $4\pi kQ$.

Podemos ampliar este resultado a sistemas de más de una carga puntual. En la figura 22.20, la superficie encierra dos cargas puntuales, q_1 y q_2, y existe una tercera carga puntual q_3 fuera de la superficie. Puesto que el campo eléctrico en cualquier punto de la superficie es el vector suma de los campos eléctricos producidos por cada una de las tres cargas, el flujo neto a través de la superficie es, precisamente, la suma de los flujos debidos a las cargas individuales, $\phi_{\text{neto}} = \oint_S (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3) \cdot \hat{n} \, dA$. El flujo originado por la carga q_3, que está fuera de la superficie, es cero debido a que cada línea de fuerza procedente de q_3 que entra en la superficie en un punto abandona la misma en algún otro punto. El flujo a través de la superficie debido a la carga q_1 es $4\pi kq_1$ y el debido a la carga q_2 es $4\pi kq_2$. El flujo neto a través de la superficie es igual a $4\pi k(q_1 + q_2)$ que puede ser positivo, negativo o cero, dependiendo de los signos y valores de las dos cargas.

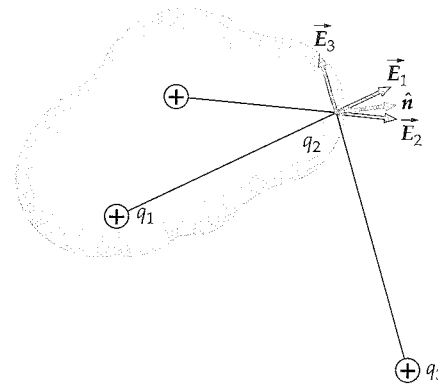


FIGURA 22.20 Superficie que incluye las cargas puntuales q_1 y q_2, pero no q_3. El flujo neto a través de esta superficie es $4\pi k(q_1 + q_2)$.

El flujo neto a través de cualquier superficie es igual a la carga neta dentro de la superficie dividida por ϵ_0:

$$\phi_{\text{neto}} = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} \, dA = \oint_S E_n \, dA = \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon_0} \qquad 22.16$$

LEY DE GAUSS

Esta es la llamada **ley de Gauss**. Nos indica que el campo eléctrico debido a una carga puntual aislada varía inversamente con el cuadrado de la distancia desde la carga. Esta propiedad del campo eléctrico es la que ha hecho posible dibujar un número fijo de líneas de fuerza desde una carga y conseguir que la densidad de líneas sea proporcional a la intensidad del campo.

La ley de Gauss es válida para todas las superficies y distribuciones de carga. Como veremos en la sección siguiente, puede utilizarse para calcular el campo eléctrico en algunas distribuciones especiales de carga con altos grados de simetría. En los campos eléctricos que resultan de distribuciones de carga estáticas, la ley de Gauss y la ley de Coulomb son equivalentes. Sin embargo, la ley de Gauss es más general, pues también puede aplicarse a distribuciones de carga no estáticas.

Ejemplo 22.9 Flujo a través de una superficie cerrada

Un campo eléctrico vale $\vec{E} = +(200\ \text{N/C})\hat{k}$ para $x > 0$ y $\vec{E} = -(200\ \text{N/C})\hat{k}$ para $x < 0$. Un cilindro imaginario de longitud 20 cm y radio $R = 5$ cm tiene su centro en el origen y su eje a lo largo del eje x, de modo que un extremo se encuentra en $x = +10$ cm y el otro en $x = -10$ cm (figura 22.21). (*a*) ¿Cuál es el flujo neto del campo eléctrico que atraviesa la superficie total cerrada del cilindro? (*b*) ¿Cuál es la carga neta localizada en el interior del cilindro?

PLANTEAMIENTO La superficie cerrada que se describe se compone de tres piezas: dos bases y una superficie curvada. Calcular el flujo de $\vec{E}$ a través de cada pieza por separado. Para calcular el flujo a través de una pieza, dibujar el vector $\hat{n}$ normal hacia fuera en un punto de la pieza elegido al azar y añadir el vector $\vec{E}$ en dicho punto. Si $E_n = \vec{E} \cdot \hat{n}$ es el mismo en todos los puntos de una determinada pieza, de la superficie gausiana, entonces el flujo total a través de la mencionada pieza es $E_n A$, donde A es su área. El flujo neto a través de la superficie cerrada se obtiene sumando los flujos a través de las superficies individuales. El flujo neto a través de la superficie cerrada está relacionado con la carga neta interior por la ley de Gauss (ecuación 22.16).

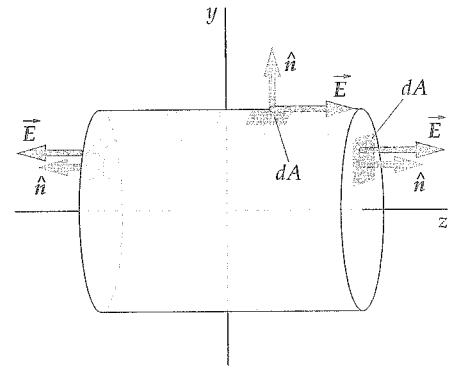


FIGURA 22.21

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dibujar una superficie cerrada en forma cilíndrica. Añadir el vector normal $\hat{n}$ en cada una de las partes de la superficie del cilindro, bases y superficie lateral, y el vector $\vec{E}$ (figura 22.21):

2. Calcular el flujo que sale de la base derecha del cilindro, cuyo vector unitario es $\hat{n} = \hat{k}$:

$$\phi_{der} = \vec{E}_{der} \cdot \hat{n}_{der} A = \vec{E}_{der} \cdot \hat{k}\pi R^2 = +(200\ \text{N/C})\hat{k} \cdot \hat{k}(\pi)(0{,}0500\ \text{m})^2$$
$$= 1{,}57\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$$

3. Calcular el flujo que sale de la base izquierda del cilindro, cuyo vector unitario es $\hat{n} = -\hat{k}$:

$$\phi_{izq} = \vec{E}_{izq} \cdot \hat{n}_{izq} A = \vec{E}_{izq} \cdot (-\hat{k})\pi R^2$$
$$= -(200\ \text{N/C})\hat{k} \cdot (-\hat{k})(\pi)(0{,}0500\ \text{m})^2$$
$$= 1{,}57\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$$

4. Calcular el flujo hacia afuera (que sale) a través de la superficie curvada. En esta superficie $\hat{n}$ tiene dirección radial perpendicular al eje z:

$$\phi_{curva} = \vec{E}_{curva} \cdot \hat{n}_{curva} A = 0$$

($\phi_{curva} = 0$ ya que $\vec{E} \cdot \hat{n} = 0$ en todos los puntos de la superficie lateral.)

5. El flujo total es la suma de flujos a través de todas las superficies:

$$\phi_{neto} = \phi_{der} + \phi_{izq} + \phi_{curva} = 1{,}57\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C} + 1{,}57\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C} + 0$$
$$= \boxed{3{,}14\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}}$$

(*b*) La ley de Gauss relaciona la carga interior con el flujo neto:

$$Q_{interior} = \epsilon_0 \phi_{neto} = (8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(3{,}14\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C})$$
$$= \boxed{2{,}78 \times 10^{-11}\ \text{C} = 27{,}8\ \text{pC}}$$

COMPROBACIÓN El flujo a través de cada una de las superficies del cilindro no depende de su longitud. Este resultado es el que cabía esperar para un campo eléctrico que no varía con la distancia desde el plano $z = 0$.

OBSERVACIÓN El flujo neto no depende de la longitud del cilindro, lo cual significa que la carga se ubica totalmente en el plano $z = 0$.

22.3 CÁLCULO DEL CAMPO ELÉCTRICO CON LA LEY DE GAUSS UTILIZANDO LA SIMETRÍA

El campo eléctrico puede calcularse con la ley de Gauss mucho más fácilmente que con la ley de Coulomb en los casos en los que existen simetrías en la distribución de carga. Existen tres casos de simetría en los que esta afirmación es cierta. **Simetría cilíndrica (o lineal)**, si la densidad de carga depende sólo de la distancia a la línea; **simetría planar**, si la densidad de carga depende sólo de la distancia desde un plano (si la densidad de carga es constante en un plano o tiene simetría en dicho plano); y **simetría esférica**, si la densidad de carga sólo depende de la distancia a un punto.

ESTRATEGIA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Cálculo de $\vec{E}$ utilizando la ley de Gauss

PLANTEAMIENTO Comprobar si la configuración de la distribución de carga tiene una de estas tres clases de simetrías. Si no es así, deberemos pensar en otro método de cálculo para el campo eléctrico. Si la respuesta es afirmativa, se hace un diagrama de la configuración de carga y, considerando sus propiedades de simetría, se establece el módulo, dirección y sentido del campo eléctrico.

SOLUCIÓN

1. En el diagrama se dibuja una superficie imaginaria, denominada **superficie gausiana** (por ejemplo, el cilindro del ejemplo 22.9). Esta superficie ha de elegirse de forma que en los puntos de cada parte constituyente de la superficie total, el campo eléctrico sea cero, normal a la superficie o paralelo a ella. Para la configuración con simetría cilíndrica, la superficie gausiana es un cilindro coaxial con la línea de simetría; para la planar, la superficie gausiana es un cilindro en el que el plano de simetría corta por la mitad al cilindro y es perpendicular a su eje; y para la esférica (o simetría puntual), la superficie gausiana es una esfera centrada en el punto de simetría. En cada parte constitutiva de la superficie total, se establece y dibuja el campo eléctrico y el vector unitario perpendicular al elemento de área dA.
2. Las superficies cerradas cilíndricas tienen tres diferentes partes; las superficies esféricas, por el contrario, sólo constan de una única pieza. El flujo a través de cada parte de la superficie gausiana es igual a E_nA, donde E_n es la componente normal a su superficie y A es el área de dicha parte de la gausiana. Se suman todos los flujos parciales correspondientes a cada parte para obtener el flujo total que sale de la superficie cerrada.
3. Se calcula la carga total encerrada en el volumen que engloba la superficie gausiana.
4. Se aplica la ley de Gauss para obtener una relación entre el campo E_n y la carga encerrada en el interior, y así poder determinar E_n.

¡COMPROBACIÓN CONCEPTUAL 22.1

El campo eléctrico $\vec{E}$ en la ley de Gauss, ¿es sólo el producido por las cargas localizadas en el interior de la superficie gausiana o es el debido a las cargas internas y externas a ésta?

Ejemplo 22.10 $\vec{E}$ debido a una lámina uniformemente cargada

Sea una lámina grande de plástico (que podemos considerar infinita) uniformemente cargada, de grosor $2a$, que ocupa la región del espacio entre los planos $z = -a$ y $z = +a$. Hallar el campo eléctrico en todo el espacio debido a esta configuración. La carga por unidad de volumen es ρ.

PLANTEAMIENTO El sistema tiene simetría planar con $z = 0$ como plano de simetría. Utilizando los argumentos establecidos anteriormente, determinar la dirección y el sentido del campo eléctrico en cualquier punto del espacio y aplicar la ley de Gauss para obtener el campo eléctrico.

SOLUCIÓN

1. Utilizar las consideraciones de simetría para determinar la dirección de $\vec{E}$. Como la lámina es infinita, no hay campo en la dirección paralela a la lámina:

Si $\rho > 0$, $\vec{E}$ apunta hacia afuera del plano $z = 0$ y si es $\rho < 0$, $\vec{E}$ se dirige hacia el plano $z = 0$. En el plano $z = 0$, el campo es nulo.

2. Hacer un esquema de la configuración de la carga, de tal forma que el plano de simetría (el plano $z = 0$) sea bisector de la superficie gausiana y perpendicular a su eje. La superficie gausiana es un cilindro que se extiende desde $-z$ hasta $+z$ (figura 22.22):

3. Escribir la ley de Gauss (ecuación 22.16):

$$\phi_{\text{neto}} = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA = \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon_0}$$

4. El flujo saliente de la superficie es igual a la suma de los flujos en cada parte de la superficie gausiana. Dibujar $\hat{n}$ y $\vec{E}$ en un elemento de área en cada fragmento de la superficie cerrada (figura 22.22):

$$\phi_{\text{neto}} = \phi_{\text{izq}} + \phi_{\text{der}} + \phi_{\text{curva}}$$

donde
$$\phi_{\text{izq}} = \int_{\text{izq}} \vec{E} \cdot \hat{n} dA$$
$$\phi_{\text{der}} = \int_{\text{der}} \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA$$
$$\phi_{\text{curva}} = \int_{\text{curva}} \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA$$

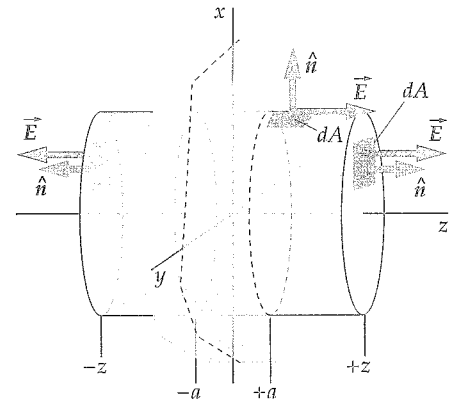


FIGURA 22.22 Superficie gausiana para el cálculo del campo eléctrico $\vec{E}$ debido a un plano infinito de cargas. (Sólo se muestra la parte del plano que se encuentra dentro de la superficie gausiana.) En las caras superior e inferior de este cilindro, $\vec{E}$ es perpendicular a la superficie y de valor constante. En la parte curvada de la superficie, $\vec{E}$ es paralelo a ella.

5. Como $\vec{E} \cdot \hat{n}$ es cero en la superficie curva del cilindro, el flujo a través de esta superficie es cero:

$$\phi_{\text{curva}} = 0$$

6. $\vec{E}$ es uniforme en la base derecha del cilindro, por lo que la integral es fácil de calcular como producto de $\vec{E} \cdot \hat{n} = E_n$; siendo A el área de la base derecha:

$$\phi_{\text{der}} = \int_{\text{der}} \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA = \int_{\text{der}} E_n dA = E_n \int_{\text{der}} dA = E_n A$$

7. Las dos bases del cilindro están a la misma distancia del plano de simetría (el plano $z = 0$), de forma que $\vec{E}$ en la izquierda es igual y de sentido opuesto al de la derecha. Los vectores unitarios normales a la superficie de las bases son opuestos también. De esta forma, $\vec{E} \cdot \hat{n} = E_n$ vale igual en ambas bases y, por consiguiente, el flujo a través de estas bases es idéntico:

$\vec{E} \cdot \hat{n} = E_n$ es el mismo en las dos bases,
$\therefore \phi_{\text{izq}} = \phi_{\text{der}} = E_n A$

8. Sumar los flujos individuales para obtener el flujo total:

$$\phi_{\text{neto}} = \phi_{\text{izq}} + \phi_{\text{der}} + \phi_{\text{curva}} = E_n A + E_n A + 0 = 2E_n A$$

9. Determinar la carga en el interior de la superficie gausiana. El volumen de un cilindro es igual a la superficie de la sección transversal por la longitud del cilindro. El cilindro tiene una longitud de $2z$:

$$Q_{\text{interior}} = \rho A 2a \qquad (z \geq a)$$
$$Q_{\text{interior}} = \rho A 2z \qquad (z \leq a)$$

10. Sustituir los resultados del paso 8 y 9 en $\phi_{\text{neto}} = Q_{\text{interior}}/\epsilon_0$ (resultado del paso 3) y despejar E_n en la base de la derecha:

Para $|z| \geq a$, $2E_n A = \rho A 2a/\epsilon_0$, así $E_n = \rho a/\epsilon_0$.
Para $-a \leq z \leq a$, $2E_n A = \rho A 2|z|/\epsilon_0$, así $E_n = \rho|z|/\epsilon_0$.

11. Determinar $\vec{E}$ en función de z. En la región $z < 0$, $\hat{n} = -\hat{k}$, de tal forma que $E_z = E_n$; esto significa que $\vec{E}$ está en la dirección $-z$ y, por tanto, E_z es negativo:

$$\vec{E} = E_z\hat{k} = \boxed{\begin{cases} -(\rho a/\epsilon_0)\hat{k} & (z \leq -a) \\ (\rho z/\epsilon_0)\hat{k} & (-a \leq z \leq a) \\ +(\rho a/\epsilon_0)\hat{k} & (z \geq +a) \end{cases}}$$

o

$$\vec{E} = E_z\hat{k} = \boxed{\begin{cases} \text{sign}(z) \cdot (\rho a/\epsilon_0)\hat{k} & (|z| \geq a) \\ \text{sign}(z) \cdot (\rho|z|/\epsilon_0)\hat{k} & (|z| \leq a) \end{cases}}$$

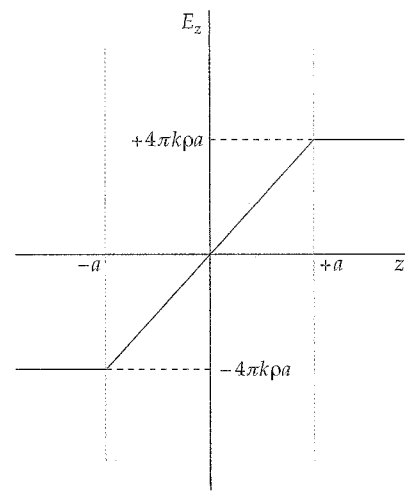


FIGURA 22.23 Una gráfica de E_z versus z para una lámina infinita de grosor $2a$ y cargada uniformemente con un densidad volúmica de carga ρ.

COMPROBACIÓN El campo eléctrico tiene unidades de N/C. De acuerdo con el resultado del paso 11, vemos que $\rho a/\epsilon_0$ deberá expresarse en las mismas unidades. Ello es así porque $\epsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$, ρ tiene unidades de C/m^3, y a unidades de m.

OBSERVACIÓN Fuera de la lámina, el campo eléctrico es el mismo que el de un plano uniformemente cargado (ecuación 22.10), con $\sigma = 2\rho a$. La figura 22.23 muestra una gráfica de E_z producido por la lámina versus z. Estas gráficas son fácilmente comparables teniendo presente que $2\pi k = 1/(2\epsilon_0)$.

Se puede utilizar la ley de Gauss para deducir la ley de Coulomb. Para ello, usamos la ley de Gauss para hallar el campo eléctrico a una distancia r de una carga puntual q. Se pone el origen en donde se halla la carga y como superficie gausiana elegiremos una superficie esférica de radio r centrada en la carga. Por simetría, $\vec{E}$ es radial y su módulo depende sólo de la distancia a la carga. Por consiguiente, la componente de $\vec{E}$ normal a la superficie es igual a la componente radial de $\vec{E}$ en cada punto de la superficie, es decir, $E_n = \vec{E} \cdot \hat{n} = \vec{E} \cdot \hat{r} = E_r$, donde $\hat{n}$ es la normal hacia fuera, y tiene el mismo valor en todos los puntos de nuestra superficie esférica. El módulo del $\vec{E}$ en un punto dado puede depender de la distancia radial con origen en la carga, pero no de la dirección del vector que une la carga con el punto. El flujo neto a través de esta superficie viene dado por:

$$\phi_{\text{neto}} = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA = \oint_S E_n\, dA = E_n \oint_S dA = E_r 4\pi r^2$$

donde $\oint_S dA = 4\pi r^2$ es el área total de la superficie esférica. Puesto que la carga total en el interior de la superficie es precisamente la carga puntual q, la ley de Gauss nos da

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

o sea,

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

Así pues, hemos deducido la ley de Coulomb a partir de la ley de Gauss. Como también puede deducirse la ley de Gauss a partir de la ley de Coulomb (véase sección 22.6) queda claro que ambas leyes son equivalentes para cargas estáticas.

Ejemplo 22.11 $\vec{E}$ debido a una corteza esférica cargada de grosor reducido

Determinar el campo eléctrico debido a una corteza esférica de radio R y carga total Q.

PLANTEAMIENTO Esta configuración de carga depende solamente de la distancia desde el centro de la esfera y, por lo tanto, tiene simetría esférica (o puntual). Esta simetría implica que $\vec{E}$ deberá ser radial y tiene un módulo que depende sólo de la distancia al centro de la esfera. Se requiere considerar una superficie gausiana, con distribución de carga concéntrica, y radio arbitrario r.

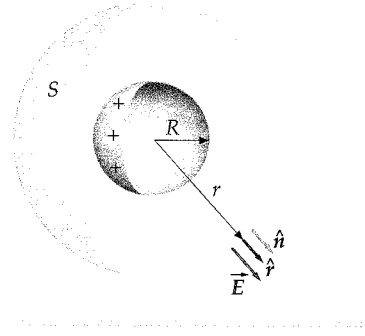


FIGURA 22.24 Superficie gausiana esférica de radio $r > R$ para el cálculo del campo eléctrico exterior a una corteza esférica uniformemente cargada de radio R.

SOLUCIÓN

1. Dibujar la configuración de la carga y una superficie gausiana S de radio $r > R$. Incluir un elemento de área dA, la normal $\hat{n}$, y el campo eléctrico en el elemento de superficie (figura 22.24):

2. Expresar la ley de Gauss (ecuación 22.16):

$$\phi_{\text{neto}} = \oint_S E_n\, dA = \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon_0}$$

3. El valor de E_n es idéntico en toda superficie S, por lo que la integral es fácil de resolver como producto de E_n por el área de la superficie gausiana:

$$E_n \oint_S dA = \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon_0}$$

4. La integral del elemento de área extendido a toda la superficie es el área de la esfera, cuyo valor es $4\pi r^2$:

$$E_n 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon_0}$$

5. Debido a la simetría, $E_n = E_r$. Así, sustituyendo E_r por E_n, se obtiene el valor de E_r:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_{\text{interior}}}{r^2}$$

6. Para $r > R$, $Q_{\text{interior}} = Q$. Para $r < R$, $Q_{\text{interior}} = 0$:

$$\vec{E} = E_r\hat{r}, \quad \text{donde} \quad \boxed{\begin{array}{ll} E_r = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q}{r^2} & r > R \\ E_r = 0 & r < R \end{array}}$$

COMPROBACIÓN En el exterior de la corteza cargada, el campo eléctrico es como el de una carga puntual colocada en su centro y cuyo valor fuera el de la carga total de la corteza. Este resultado es el esperado para $r >> R$.

OBSERVACIÓN El resultado del paso 6 se puede obtener por integración directa mediante la ley de Coulomb, pero el cálculo es mucho más complicado.

La figura 22.25 muestra E_r versus r para una distribución de carga extendida en una corteza esférica. Otra vez es preciso hacer notar que el campo eléctrico es discontinuo en $r = R$, donde la densidad de carga superficial es $\sigma = Q/(4\pi R^2)$. Justo fuera de la corteza, el campo eléctrico es $E_r = Q/(4\pi\epsilon_0 R^2) = \sigma/\epsilon_0$, ya que $\sigma = Q/4\pi R^2$. Como el campo dentro de la corteza es cero, el campo eléctrico es discontinuo en $r = R$ con un salto cuyo valor es σ/ϵ_0.

El campo eléctrico de una corteza esférica uniformemente cargada viene dado por $\vec{E} = E_r\hat{r}$, donde

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} \qquad r > R \qquad 22.17a$$

$$E_r = 0 \qquad r < R \qquad 22.17b$$

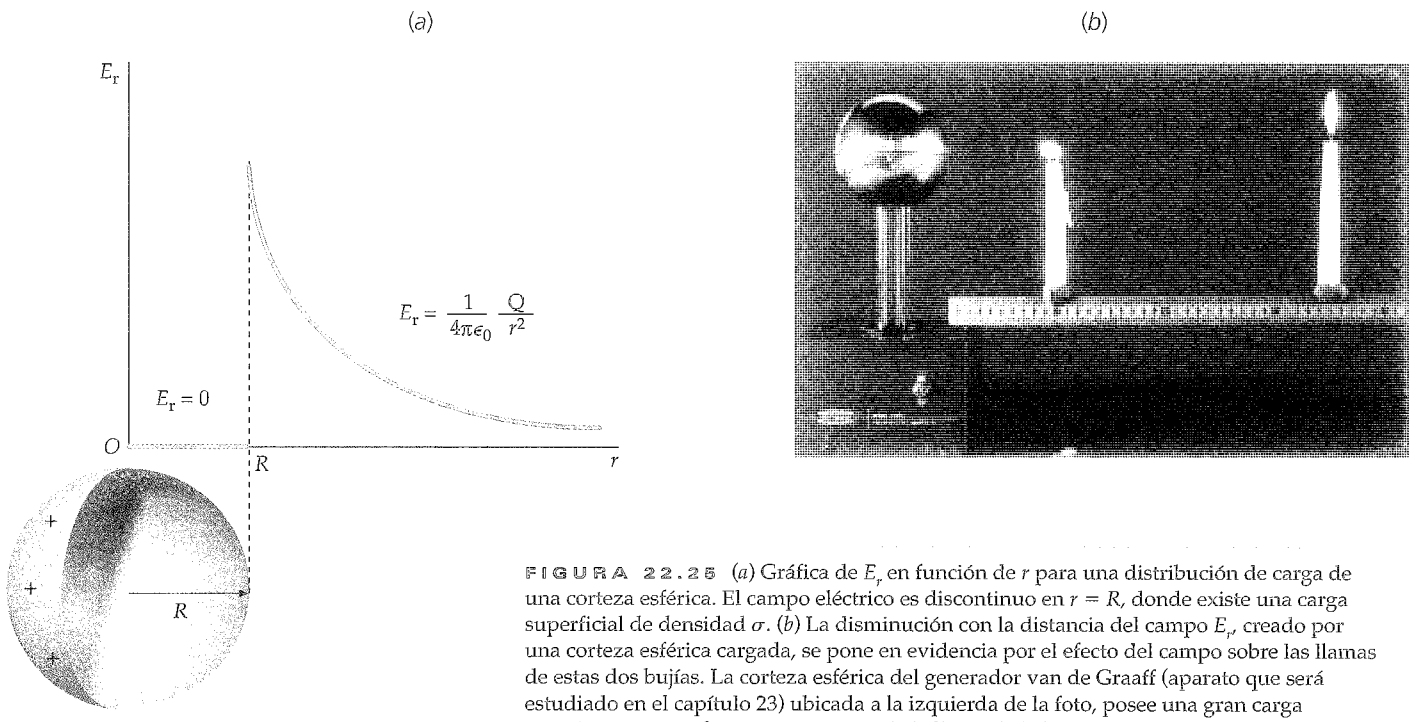


FIGURA 22.25 (*a*) Gráfica de E_r en función de r para una distribución de carga de una corteza esférica. El campo eléctrico es discontinuo en $r = R$, donde existe una carga superficial de densidad σ. (*b*) La disminución con la distancia del campo E_r, creado por una corteza esférica cargada, se pone en evidencia por el efecto del campo sobre las llamas de estas dos bujías. La corteza esférica del generador van de Graaff (aparato que será estudiado en el capítulo 23) ubicada a la izquierda de la foto, posee una gran carga negativa que atrae los iones positivos de la llama de la bujía más próxima. La llama de la derecha, más alejada, no está afectada por la presencia del campo. *(Runk/Schoenberger from Grant Heilmann.)*

Ejemplo 22.12 Campo eléctrico debido a una carga puntual y una corteza esférica

Una corteza esférica de radio $R = 3$ m tiene su centro en el origen y contiene una densidad de carga superficial $\sigma = 3\ \text{nC/m}^2$. Una carga puntual $q = 250$ nC se encuentra sobre el eje y en $y = 2$ m. Determinar el campo eléctrico en el eje x en (*a*) $x = 2$ m y (*b*) $x = 4$ m.

PLANTEAMIENTO Determinaremos el campo debido a la carga puntual y el debido a la corteza esférica y sumaremos los vectores del campo. Para (*a*), el punto del campo queda dentro de la corteza, de modo que el campo se debe sólo a la carga puntual (figura 22.26*a*). Para (*b*), el punto del campo está fuera de la corteza; por lo tanto, la corteza puede considerarse como una carga puntual en el origen. Después, determinaremos el campo debido a las dos cargas puntuales (figura 22.26*b*).

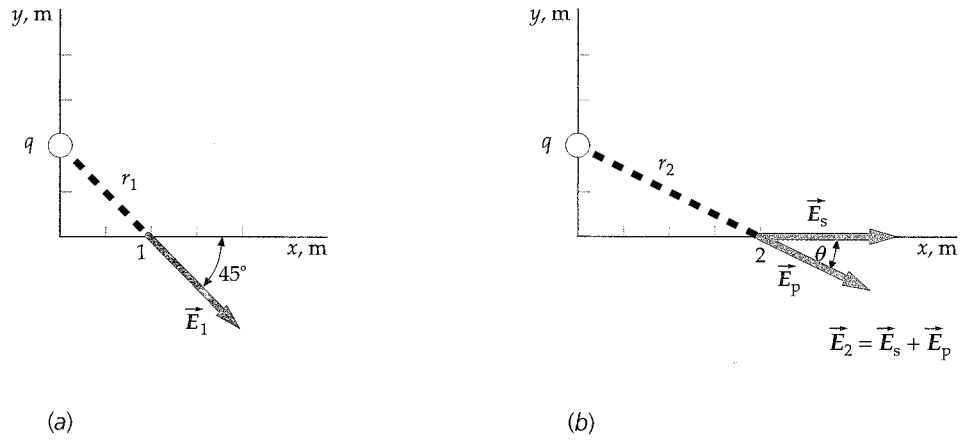


FIGURA 22.26

SOLUCIÓN

(*a*) 1. Dentro de la corteza, $\vec{E}_1$ es debido sólo a la carga puntual:

$$\vec{E}_1 = \frac{kq}{r_1^2}\hat{r}_1$$

2. Calcular el cuadrado de la distancia r_1:

$$r_1^2 = (2{,}00\ \text{m})^2 + (2{,}00\ \text{m})^2 = 8{,}00\ \text{m}^2$$

3. Utilizar r_1 para calcular el módulo del campo:

$$E_1 = \frac{kq}{r_1^2} = \frac{(8{,}99 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(250 \times 10^{-9}\ \text{C})}{8{,}00\ \text{m}^2} = 281\ \text{N/C}$$

4. En la figura 22.26*a*, puede verse que el campo forma un ángulo de $-45°$ con el eje x:

$$\theta_1 = 45{,}0°$$

5. Expresar $\vec{E}_1$ en función de sus componentes:

$$\vec{E}_1 = E_{1x}\hat{\imath} + E_{1y}\hat{\jmath} = E_1 \cos 45{,}0°\ \hat{\imath} - E_1 \operatorname{sen} 45{,}0°\ \hat{\jmath}$$
$$= (281\ \text{N/C}) \cos 45{,}0°\ \hat{\imath} - (281\ \text{N/C}) \operatorname{sen} 45{,}0°\ \hat{\jmath}$$
$$= \boxed{(199\hat{\imath} - 199\hat{\jmath})\ \text{N/C}}$$

(*b*) 1. Fuera de su perímetro, la corteza puede considerarse como una carga puntual en el origen y el campo debido a la corteza $\vec{E}_S$ está dirigido a lo largo del eje x:

$$\vec{E}_S = \frac{kQ}{x_2^2}\hat{\imath}$$

2. Calcular la carga total Q sobre la corteza:

$$Q = \sigma 4\pi R^2 = (3{,}00\ \text{nC/m}^2)4\pi(3{,}00\ \text{m})^2 = 339\ \text{nC}$$

3. Utilizar Q para calcular el campo debido a la corteza:

$$E_S = \frac{kQ}{x_2^2} = \frac{(8{,}99 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(339 \times 10^{-9}\text{C})}{(4{,}00\ \text{m})^2} = 190\ \text{N/C}$$

4. El campo debido a la carga puntual es:

$$\vec{E}_P = \frac{kq}{r_2^2}\hat{r}_2$$

5. Calcular el cuadrado de la distancia entre la carga puntual q que está sobre el eje y y el punto del campo en $x = 4$ m:

$$r_2^2 = (2{,}00\ \text{m})^2 + (4{,}00\ \text{m})^2 = 20{,}0\ \text{m}^2$$

6. Calcular el módulo del campo debido a la carga puntual:

$$E_P = \frac{kq}{r_2^2} = \frac{(8{,}99 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(250 \times 10^{-9}\ \text{C})}{20{,}0\ \text{m}^2} = 112\ \text{N/C}$$

7. Este campo forma un ángulo θ con el eje x:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{2{,}00\ \text{m}}{4{,}00\ \text{m}} = 0{,}500 \Rightarrow \theta = \text{arctg}\,0{,}500 = 26{,}6°$$

8. Las componentes x e y de este campo son, por lo tanto:

$$E_x = E_{Px} + E_{Sx} = E_P\cos\theta + E_S$$
$$= (112\ \text{N/C})\cos 26{,}6° + 190\ \text{N/C} = 290\ \text{N/C}$$
$$E_y = E_{Py} + E_{Sy} = -E_p\,\text{sen}\,\theta + 0$$
$$= -(112\ \text{N/C})\,\text{sen}\,26{,}6° = -50{,}0\ \text{N/C}$$
$$\vec{E}_2 = \boxed{(290\hat{\imath} - 50{,}0\hat{\jmath})\ \text{N/C}}$$

COMPROBACIÓN El resultado del paso 8 de la parte (*b*) es cuantitativamente concordante con la figura 22.26*b*. Es decir, E_x es positivo, E_y es negativo y $|E_y| < E_x$.

OBSERVACIÓN Conocidas las componentes x, y, z de un vector, queda determinado el vector. En estos casos, la componente z es cero.

CAMPO ELÉCTRICO $\vec{E}$ DEBIDO A UNA ESFERA UNIFORMEMENTE CARGADA

Ejemplo 22.13 Campo eléctrico debido a una esfera sólida cargada

Determinar el campo eléctrico (*a*) fuera y (*b*) dentro de una esfera sólida uniformemente cargada de radio R portadora de una carga Q que está distribuida por todo el volumen de la esfera con densidad de carga $\rho = Q/V$, siendo $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ el volumen de la esfera.

PLANTEAMIENTO Por simetría, el campo eléctrico debe ser radial. Para determinar E_r fuera de la esfera cargada, debemos elegir una superficie esférica gausiana de radio $r > R$ (figura 22.27*a*). Para determinar E_r dentro de la esfera, elegimos una superficie gausiana esférica de radio $r < R$ (figura 22.27*b*). En cada una de estas superficies, E_r es constante. La ley de Gauss relaciona entonces E_r con la carga total que hay dentro de la superficie.

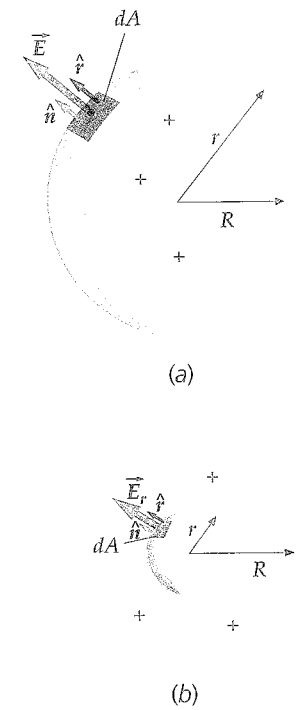


FIGURA 22.27

SOLUCIÓN

1. Dibujar una esfera cargada de radio R y una superficie gausiana esférica de radio $r > R$:

2. Relacionar el flujo que atraviesa la superficie gausiana con el campo eléctrico E_r que existe en ella. Para cada punto de dicha superficie $\hat{n} = \hat{r}$ y E_r tiene el mismo valor:

$$\phi_{\text{neto}} = \vec{E}\cdot\hat{n}A = \vec{E}\cdot\hat{r}A = E_r 4\pi r^2$$

(El área de la superficie de una esfera de radio r es $4\pi r^2$.)

3. Aplicar la ley de Gauss para relacionar el campo con la carga total Q que hay en el interior de la superficie, Q:

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon_0}$$

4. Determinar Q_{interior} para valores de r. La densidad de carga es $\rho = Q/V$, donde $V = \frac{4}{3}\pi R^3$:

Para $r \geq R$, $Q_{\text{interior}} = Q$

Para $r \leq R$, $Q_{\text{interior}} = \rho V'$,

donde $V' = \frac{4}{3}\pi r^3$

así

$$Q_{\text{interior}} = \frac{Q}{V}V' = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{4}{3}\pi r^3 = Q\frac{r^3}{R^3}$$

5. Sustituir en el resultado del paso 3 y despejar $\vec{E}$:

$\vec{E} = E_r\hat{r}$, donde

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} \qquad r \geq R$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{r^3}{R^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^3}r \qquad r \leq R$$

COMPROBACIÓN En el centro de la esfera cargada, el campo eléctrico es cero, tal como puede deducirse por la simetría del sistema. Para $r >> R$, el campo es idéntico al que crea una carga puntual Q en el centro de la esfera, tal como era de esperar.

OBSERVACIÓN La figura 22.28 muestra E_r en función de r para la distribución de carga de este ejemplo. En el interior de la esfera, E_r aumenta con r. Obsérvese que E_r es continuo en $r = R$. A veces se utiliza una esfera uniformemente cargada para describir el campo eléctrico de un núcleo atómico.

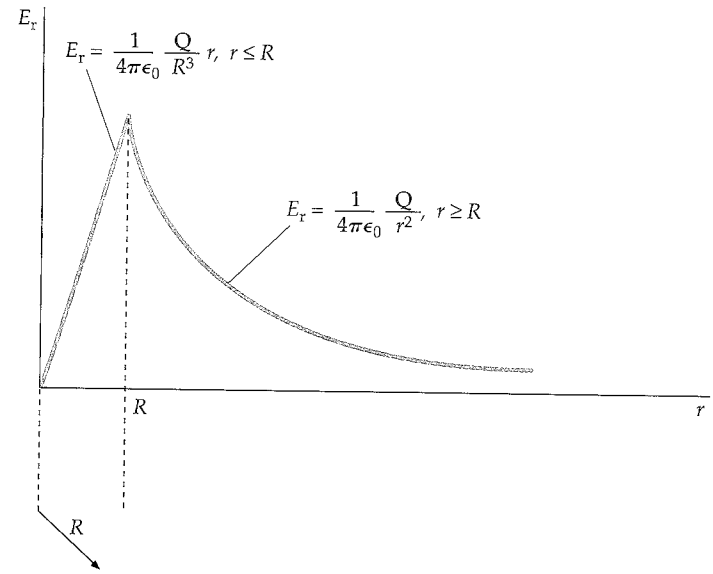


FIGURA 22.28

El ejemplo 22.13 nos indica que el campo eléctrico a una distancia r del centro de una esfera uniformemente cargada de radio R viene dado por

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} \qquad r \geq R \qquad 22.18a$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^3}r \qquad r \leq R \qquad 22.18b$$

donde Q es la carga total de la esfera.

Ejemplo 22.14 Campo eléctrico debido a una carga lineal infinita

Utilizar la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico a una distancia r de una carga lineal infinitamente larga de densidad de carga uniforme λ. (Este problema se solucionó en el ejemplo 22.3 utilizando la ley de Coulomb.)

PLANTEAMIENTO Como consecuencia de la simetría del sistema, el campo es perpendicular a la línea de carga, apuntando hacia fuera de ésta si la distribución lineal λ es positiva y con la misma dirección y sentido opuesto si λ es negativa. Además, el módulo del campo depende exclusivamente de la distancia radial del punto de observación a la línea cargada. Por lo tanto, la superficie gausiana que elegimos es la de un cilindro de longitud L cuyo eje sea la línea. Calcularemos el flujo del campo $\vec{E}$ que sale a través de cada una de las tres partes que componen la superficie, y utilizando la ley de Gauss relacionaremos el flujo total con la distribución de carga λ.

SOLUCIÓN

1. Dibujamos la línea cargada y la superficie cilíndrica de radio R y longitud L (figura 22.29). Esta superficie se compone de dos bases y la superficie lateral. Elegimos un punto cualquiera de cada una de estas partes y dibujamos los correspondientes vectores $\vec{E}$ y $\hat{n}$ en estos puntos. Como consecuencia de la simetría del sistema, el campo es perpendicular a la línea cargada, apuntando hacia fuera si la distribución lineal λ es positiva y con la misma dirección y sentido opuesto si es negativa. Además, el módulo del campo depende solamente de la distancia radial entre el punto de observación del campo y la línea cargada:

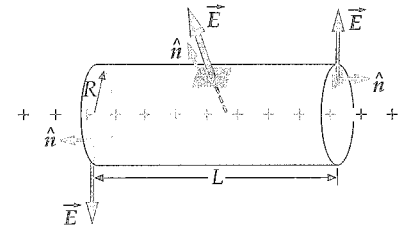


FIGURA 22.29

2. Calculamos el flujo que sale por la superficie lateral. En cada punto de ésta $\hat{R} = \hat{n}$, siendo $\hat{R}$ el vector unitario en la dirección radial del sistema de coordenadas cilíndricas:

$$\phi_{\text{lateral}} = \vec{E} \cdot \hat{n} A_{\text{curva}} = \vec{E} \cdot \hat{R} A_{\text{curva}} = E_R 2\pi RL$$

3. Calculamos el flujo que sale por las bases. En éstas el vector unitario tiene la dirección de la línea de carga y, además, los vectores $\hat{n}$ y $\vec{E}$ son perpendiculares:

$$\phi_{\text{izquierda}} = \vec{E} \cdot \hat{n} A_{\text{izquierda}} = 0$$
$$\phi_{\text{derecha}} = \vec{E} \cdot \hat{n} A_{\text{derecha}} = 0$$

4. Aplicamos la ley de Gauss para relacionar el campo con la carga total encerrada en la superficie gausiana, Q_{interior}. El flujo neto que sale de la superficie es la suma de los flujos calculados en 2 y 3, y la Q_{interior} es la carga contenida en el segmento de longitud L de la línea de carga, encerrado en el cilindro:

$$\phi_{\text{neto}} = \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon_0}$$

$$E_R 2\pi RL = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}, \text{ entonces } \vec{E} = E_R \hat{R}, \text{ donde } E_R = \boxed{\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{R}}$$

COMPROBACIÓN Como $1/(2\pi\epsilon_0) = 2k$, el resultado del paso 4 puede escribirse también como $2k\lambda/R$. Esta es la misma expresión para E_R que puede obtenerse por la ley de Coulomb (véase el ejemplo22.3).

En el cálculo anterior fue necesario suponer que el punto del campo estaba muy alejado de los extremos de la carga lineal, de tal modo que E_n fuese constante en todos los puntos de la superficie gausiana cilíndrica. (Esto equivale a suponer que a la distancia R de la línea de carga, ésta parece ser infinitamente larga.) En las proximidades del extremo de una carga lineal de longitud finita no podemos suponer que $\vec{E}$ es perpendicular a la superficie cilíndrica o que E_n es constante en todos los puntos de la misma y, por lo tanto, no puede utilizarse la ley de Gauss para calcular el campo eléctrico.

Es importante destacar que aunque para usar la ley de Gauss en el cálculo de campos eléctricos es necesaria la existencia de un alto grado de simetría, esta ley es válida para cualquier superficie que rodee cualquier distribución de cargas. La ley de Gauss también es útil en los cálculos relacionados con conductores en equilibrio estático, como veremos en la sección 22.5.

22.4 DISCONTINUIDAD DE E_n

Ya hemos visto que el campo eléctrico correspondiente a un plano infinito y a una corteza esférica de carga es discontinuo en la cantidad σ/ϵ_0 en un punto donde existe una densidad de carga superficial σ. Como veremos, éste es un resultado general para la componente del campo eléctrico perpendicular a una superficie con una densidad de carga σ.

La figura 22.30 muestra una superficie arbitraria con densidad de carga superficial σ. Calificamos de arbitraria una superficie cuando aun teniendo curvaturas, estas no presentan variaciones bruscas (es decir, pliegues), pudiendo variar σ como una función continua. Consideramos el campo eléctrico $\vec{E}$ en la vecindad de un punto P de la superficie como superposición del campo debido a la carga contenida en un pequeño disco de la superficie centrado en P, $\vec{E}_{\text{disco}}$, y el campo debido a las demás cargas contenidas en todo el espacio, $\vec{E}'$. Entonces, tenemos

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{disco}} + \vec{E}' \qquad 22.19$$

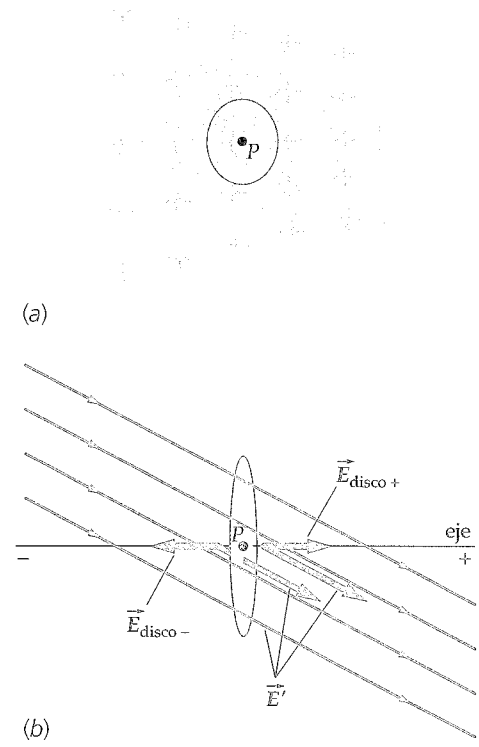


FIGURA 22.30 (*a*) Superficie con densidad de carga superficial. (*b*) Campo eléctrico $\vec{E}_{\text{disco}}$ debido a la carga contenida en un pequeño disco, más el campo eléctrico $\vec{E}'$ debido a las demás cargas.

El disco debe ser suficientemente pequeño como para que podamos considerarlo plano y uniformemente cargado. En el eje del disco, el campo $\vec{E}_{\text{disco}}$ viene dado por la ecuación 22.9, y en los puntos de dicho eje que estén muy cercanos al disco, el módulo del campo viene dado por $E_{\text{disco}} = |\sigma|/(2\epsilon_0)$, y su dirección es hacia fuera si σ es positiva y hacia dentro si σ es negativa. El módulo, dirección y sentido del campo $\vec{E}_{\text{disco}}$ son desconocidos; sin embargo, este campo es continuo en la vecindad del punto P. Por lo tanto, en los puntos del eje del disco o muy próximos a él, $\vec{E}'$ es esencialmente uniforme.

El eje del disco es normal a la superficie y, como consecuencia, las componentes de un vector con respecto a este eje son componentes normales a la superficie. Las componentes normales de los vectores de la ecuación 22.19 cumplen que $E_n = E_{\text{disco}\,n} + E'_n$. Toda superficie del espacio tiene dos caras, cuyos vectores unitarios son tales que $n+ = -n-$. Denominamos lado + de la superficie aquél en el que $E_{n+} = \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0} + E'_{n+}$ y lado − aquél en el que $E_{n-} = -\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0} + E'_{n+}$. Por lo tanto, la componente normal del campo total es discontinua en la superficie.

$$\Delta E_n = E_{n+} - E_{n-} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\right) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \qquad 22.20$$

DISCONTINUIDAD DE E_n EN UNA CARGA SUPERFICIAL

donde hemos considerado que $E'_{n+} = E'_{n-}$ en los puntos muy próximos al disco, dado que $\vec{E}'$ es continuo y uniforme en el mismo

Es preciso hacer notar que la discontinuidad de E_n ocurre tanto en un disco finito cargado como en un plano infinito (véase la figura 22.12) o una corteza esférica con una distribución de carga superficial (véase la figura 22.28). Por el contrario, no aparece esta discontinuidad en la superficie de una distribución de carga volúmica. El campo eléctrico es discontinuo en cualquier lugar donde haya una densidad de carga volúmica infinita. Esto incluye regiones del espacio con cargas puntuales finitas, con densidades de carga lineales finitas y con densidades de carga superficiales finitas. Considerando la ecuación 22.20, podemos decir que la componente normal del campo es discontinua en todos los sistemas electrostáticos con densidades superficiales finitas.

22.5 CARGA Y CAMPO EN LA SUPERFICIE DE LOS CONDUCTORES

Todo conductor posee cargas con libertad de movimiento en el volumen que limita su superficie. Si hubiera un campo eléctrico que actuase en el interior del conductor, se produciría una fuerza que daría lugar a una corriente eléctrica momentánea (las corrientes eléctricas se abordarán en el capítulo 25). Sin embargo, a menos que exista una fuente de energía que mantenga esta corriente, la carga libre del conductor se redistribuye de tal modo que se crea un campo eléctrico que anula cualquier campo externo dentro del conductor. Se dice entonces que el conductor se encuentra en **equilibrio electrostático**. Así, en el equilibrio, el campo eléctrico dentro de un conductor debe ser cero. El tiempo necesario para alcanzar el equilibrio depende del conductor. Para el cobre y otros buenos conductores, el tiempo es tan pequeño que, en la mayor parte de los casos, el equilibrio electrostático se alcanza al cabo de pocos nanosegundos.*

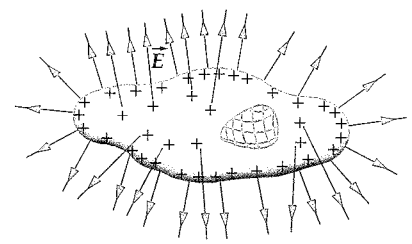


FIGURA 22.31 Superficie gausiana justo en el interior de la superficie de un conductor. Como el campo eléctrico es cero dentro de un conductor en equilibrio electrostático, el flujo neto a través de esta superficie debe ser también cero. Por lo tanto, la densidad de carga neta ρ en el interior de un conductor debe ser cero.

Podemos utilizar la ley de Gauss para demostrar que toda carga eléctrica neta de un conductor reside en su superficie. Consideremos una superficie gausiana situada justo en el interior de la superficie real de un conductor en equilibrio electrostático, como indica la figura 22.31. El tamaño y la forma de la superficie gausiana no importa, siempre que ésta se encuentre dentro del conductor en su totalidad. Como el campo eléctrico es cero en todos los puntos de dentro del conductor, será también cero en todos los puntos de la superficie gausiana, ya que toda ella está completamente

* A muy bajas temperaturas, algunos metales se convierten en superconductores. En un superconductor, una corriente se puede mantener durante mucho tiempo, incluso sin que se le suministre energía. Los metales superconductores se analizan en los capítulos 27 y 28.

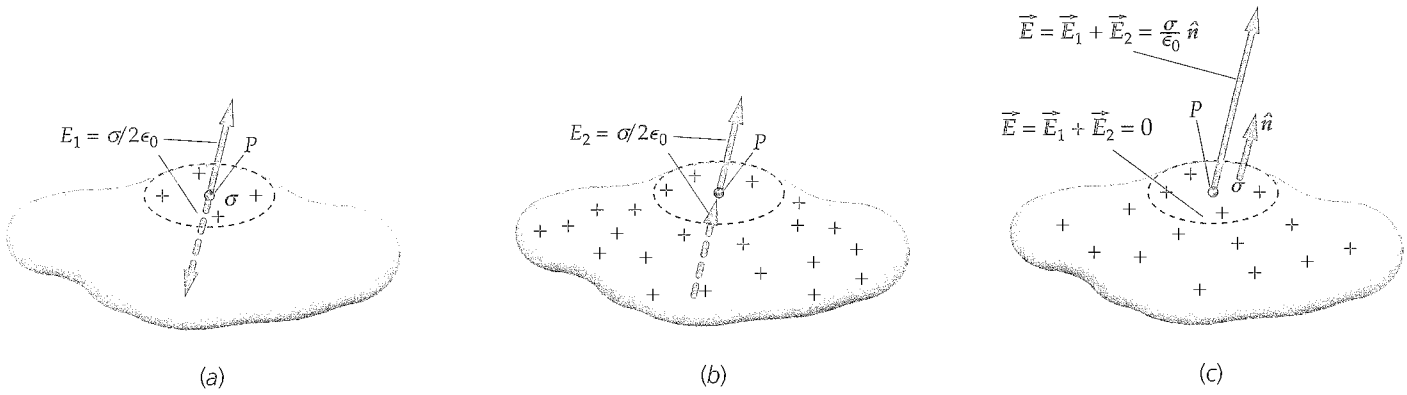


FIGURA 22.32 Conductor de forma arbitraria que posee una carga en su superficie. (*a*) La carga que hay en la vecindad del punto P se asemeja a un disco circular uniformemente cargado centrado en P. Esta carga produce un campo eléctrico de valor $\sigma/(2\epsilon_0)$ tanto en el interior como en el exterior del conductor, según está indicado. Dentro del conductor, este campo apunta hacia abajo desde el punto P. (*b*) Puesto que el campo resultante en el interior del conductor debe ser cero, el resto de la carga debe producir un campo de igual valor $\sigma/(2\epsilon_0)$ en dirección hacia arriba. El campo debido a esta carga es el mismo justamente dentro de la superficie que justamente fuera. (*c*) Dentro del conductor, estos campos se anulan como se indica en (*a*) y (*b*), pero fuera, en el punto P, se suman, resultando $E_n = \sigma/\epsilon_0$.

dentro del conductor. Así pues, no hay carga neta dentro de cualquier superficie incluida completamente dentro del conductor. Si existe alguna carga neta en el conductor, ésta debe residir sobre la superficie del propio conductor. En la superficie de un conductor en equilibrio, el campo eléctrico $\vec{E}$ debe ser perpendicular a la superficie. Si existiera una componente tangencial de $\vec{E}$, la carga libre del conductor sería acelerada tangencialmente a la superficie hasta que se anulara dicha componente.

Como E_n es discontinuo en cualquier superficie en la cantidad σ/ϵ_0, y $\vec{E}$ es cero dentro del conductor, el campo en los puntos del exterior que son fronterizos con el conductor vendrá dado por

$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \qquad 22.21$$

E_n JUSTAMENTE FUERA DE LA SUPERFICIE DE UN CONDUCTOR

Este resultado es exactamente el doble del campo producido por un disco uniformemente cargado. Podemos comprender este resultado mediante la figura 22.32. La carga sobre el conductor está compuesta por dos partes: (1) la carga en la vecindad inmediata del punto P y (2) el resto de la carga. La carga próxima al punto P puede considerarse como un pequeño disco circular uniformemente cargado centrado en P que produce un campo de módulo $\sigma/(2\epsilon_0)$ justo en el interior y en el exterior del conductor. El resto de la carga produce un campo de módulo $\sigma/(2\epsilon_0)$ que neutraliza el campo interior del conductor. Este campo debido al resto de la carga se suma al campo debido al disco cargado justamente fuera del conductor dando lugar a un campo total σ/ϵ_0.

Ejemplo 22.15 La carga del planeta Tierra — *Póngalo en su contexto*

Consultando algún tratado acerca de la atmósfera, podemos averiguar que el valor medio del campo eléctrico de nuestro planeta es de, aproximadamente, de 100 N/C y está dirigido verticalmente hacia abajo. Con lo estudiado acerca del campo eléctrico, una pregunta que podemos hacernos es si se puede determinar cuál es la carga total en la superficie de la Tierra.

PLANTEAMIENTO La Tierra es un conductor, por lo que su carga neta estará distribuida en la superficie terrestre. La densidad de carga superficial se relaciona con la componente normal del campo, E_n, mediante la ecuación 22.21. La carga total Q que estamos buscando será σA, siendo A la superficie de la Tierra.

SOLUCIÓN

1. La componente normal del campo y la densidad de carga superficial se relacionan mediante la ecuación 22.21:
$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$
2. En la superficie de la Tierra, $\hat{n}$ está dirigido hacia arriba y el campo hacia abajo; en consecuencia, E_n es negativo:
$$E_n = \vec{E}\cdot\hat{n} = E\cos 180° = -E = -100\ \text{N/C}$$
3. Consideramos los dos pasos previos y que Q es densidad de carga multiplicado por el área de la superficie terrestre:
$$Q = \sigma A = \epsilon_0 E_n A = -\epsilon_0 E A$$

4. Consideramos que la superficie de la Tierra es esférica, de radio r, y así tenemos que $A = 4\pi r^2$:

$$Q = -\epsilon_0 EA = -\epsilon_0 E 4\pi R_E^2 = -4\pi\epsilon_0 E R_E^2$$

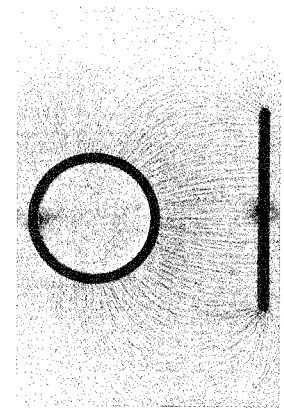
5. El radio de la Tierra es $6{,}38 \times 10^6$ m:

$$\begin{aligned} Q &= -4\pi\epsilon_0 E R_E^2 \\ &= -4\pi(8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2})(100\ \mathrm{N/C})(6{,}37 \times 10^6\ \mathrm{m})^2 \\ &= \boxed{-4{,}51 \times 10^5\ \mathrm{C}} \end{aligned}$$

COMPROBACIÓN Hay que comprobar si las unidades en el cálculo del paso 5 son correctas. Multiplicando las tres cantidades, los newtons y los metros se cancelan, dejando sólo los coulombs, tal como era de esperar.

OBSERVACIÓN ¿Una carga de $-4{,}51 \times 10^5$ C es una cantidad grande de carga? En el ejemplo 21.1, calculamos la carga total de los electrones de una moneda de cobre ($-1{,}37 \times 10^5$ C), así que la carga total de la Tierra es sólo 3,3 veces mayor que la carga de todos los electrones de una moneda de cobre.

La figura 22.33 muestra una carga puntual positiva q en el centro de una cavidad de un conductor esférico. Como la carga neta debe ser nula dentro de cualquier superficie trazada dentro del conductor, debe existir una carga negativa $-q$ inducida en la superficie interior. En la figura 22.34, la carga puntual se ha desplazado de modo que ya no se encuentra en el centro de la cavidad. Las líneas de campo de la cavidad se han alterado y la densidad de carga superficial de la carga negativa inducida en la superficie interna deja de ser uniforme. Sin embargo, la densidad de carga superficial positiva de la superficie exterior no se perturba, ya que se encuentra protegida de la cavidad mediante el conductor. El campo eléctrico generado por la carga puntual q junto con el producido por la carga superficial $-q$ ubicada en la superficie interior de la cavidad dan como resultado un campo total nulo fuera de ésta. Este resultado es cierto independientemente de dónde esté situada la carga puntual q dentro de la cavidad (si la carga puntual está en el centro de la cavidad, el campo eléctrico es, obviamente, nulo por razones de simetría). Además, la carga superficial inducida en la superficie externa del conductor produce un campo eléctrico nulo en cualquier punto del interior de la superficie externa del conductor, siendo esto cierto independientemente de que las superficies externa e interna del conductor sean no esféricas.



Líneas de fuerza en el caso de un cilindro y una placa con cargas opuestas. Las líneas están indicadas por trocitos de hilo fino suspendidos en aceite. Obsérvese que las líneas de campo son perpendiculares a los conductores y que no hay ninguna línea en el interior del cilindro. *(Harold M. Waage.)*

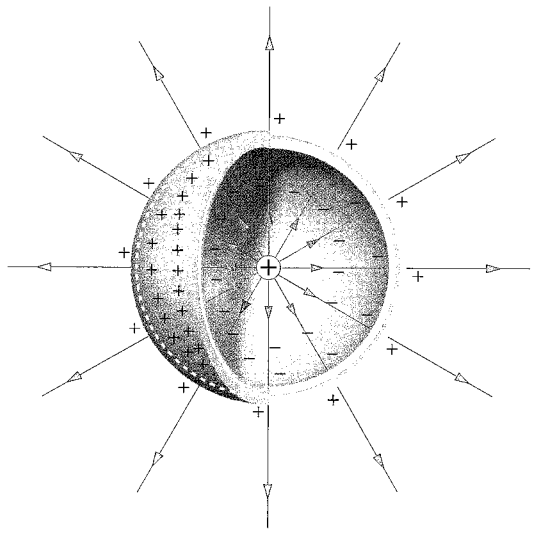


FIGURA 22.33 Una carga puntual q se encuentra en el centro de una corteza conductora esférica de paredes gruesas. Como la carga neta encerrada dentro de la superficie gausiana (indicada en azul) debe ser nula, existirá una carga superficial $-q$ inducida en la superficie interna de la corteza, y, como el conductor es neutro, una carga igual, pero de signo opuesto, $+q$, se induce en la superficie exterior de la corteza. Las líneas del campo eléctrico comienzan en la carga puntual, terminan en la superficie interna y comienzan de nuevo en la superficie exterior.

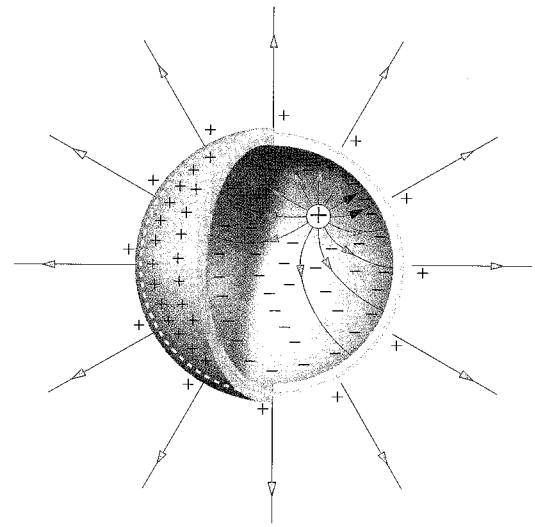


FIGURA 22.34 El mismo conductor de la figura 22.33, pero ahora la carga puntual no se encuentra en el centro de la esfera. La carga de la superficie exterior y las líneas del campo eléctrico del exterior de la esfera no quedan afectadas por el cambio de posición de la carga puntual.

* 22.6 EQUIVALENCIA DE LA LEY DE GAUSS Y LA LEY DE COULOMB EN ELECTROSTÁTICA

La ley de Gauss puede deducirse matemáticamente utilizando el concepto de ángulo sólido. Consideremos un elemento de área ΔA sobre una superficie esférica. El **ángulo sólido** $\Delta\Omega$ subtendido por ΔA en el centro de la esfera se define como

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta A}{r^2}$$

siendo r el radio de la esfera. Puesto que tanto ΔA como r^2 tienen dimensiones de longitud al cuadrado, el ángulo sólido es adimensional. La unidad de ángulo sólido es el **estereorradián** (sr). Puesto que el área total de una esfera es $4\pi r^2$, el ángulo sólido total subtendido por una esfera es

$$\frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \text{ estereorradianes}$$

Existe una estrecha analogía entre el ángulo sólido y el ángulo plano ordinario $\Delta\theta$, que se define como el cociente entre un elemento de longitud de arco de circunferencia Δs y su radio r:

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{r} \text{ radianes}$$

El ángulo plano total subtendido por un círculo es 2π radianes.

En la figura 22.35, el elemento de área ΔA no es perpendicular a las líneas radiales que salen de O. El vector unitario $\hat{n}$ normal al elemento de área forma un ángulo θ con el vector radial unitario $\hat{r}$. En este caso, el ángulo sólido subtendido por ΔA en el punto O está definido por

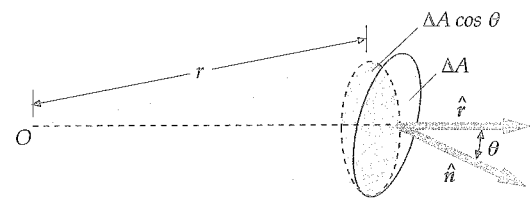


FIGURA 22.35 Elemento de área ΔA cuya normal no es paralela a la línea radial que va desde O hasta el centro del elemento. El ángulo sólido subtendido por este elemento en O es $(\Delta A \cos\theta)/r^2$.

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta A\, \hat{n}\cdot\hat{r}}{r^2} = \frac{\Delta A \cos\theta}{r^2} \qquad 22.22$$

El ángulo sólido $\Delta\Omega$ es el mismo que el subtendido por el elemento de área correspondiente a una superficie esférica de cualquier radio.

La figura 22.36 muestra una carga puntual q rodeada de una superficie de forma arbitraria. Para calcular el flujo que atraviesa esta superficie, debemos hallar $\vec{E}\cdot\hat{n}\Delta A$ para cada elemento de área de la superficie y sumar respecto a la superficie completa. El campo eléctrico en el elemento de área indicado es:

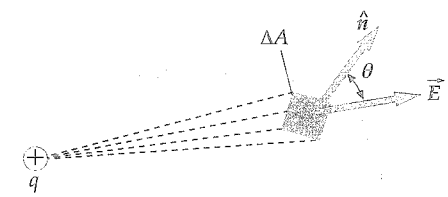


FIGURA 22.36 Carga puntual q encerrada dentro de una superficie arbitraria S. El flujo que atraviesa el elemento de área ΔA es proporcional al ángulo sólido subtendido por el elemento de área trazado desde la carga. El flujo neto que atraviesa la superficie, que se halla sumando todos los elementos de área, es proporcional al ángulo sólido total 4π trazado desde la carga, que es independiente de la forma de la superficie.

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^2}\hat{r}$$

De esta forma, el flujo a través del elemento de superficie es

$$\Delta\phi = \vec{E}\cdot\hat{n}\Delta A = \frac{kq}{r^2}\hat{r}\cdot\hat{n}\Delta A = kq\,\Delta\Omega$$

La suma del flujo que atraviesa la superficie entera es kq veces el ángulo sólido total subtendido por la superficie cerrada, que es 4π estereorradianes:

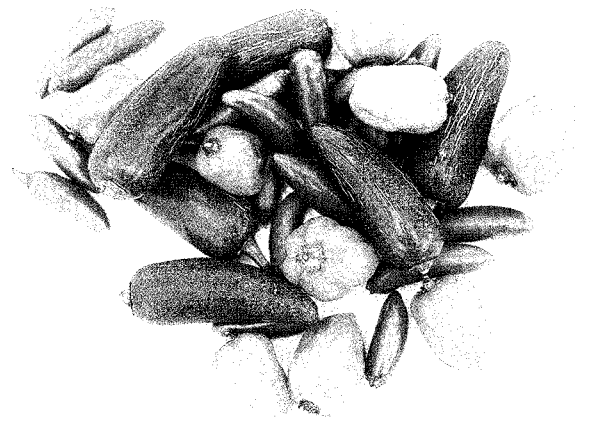
$$\phi_{\text{neto}} = \oint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,dA = kq\oint d\Omega = kq4\pi = 4\pi kq = \frac{q}{\epsilon_0} \qquad 22.23$$

que es la ley de Gauss.

Distribución de carga—caliente y frío

El momento dipolar eléctrico, o *polaridad*, afecta a la solubilidad de las sustancias. El agua, al tener un momento dipolar fuerte, es un buen disolvente de otras moléculas con momentos dipolares fuertes o débiles y de sustancias iónicas. Por otro lado, el agua es un mal disolvente de sustancias cuyas moléculas no tienen momento dipolar o de macromoléculas que tienen partes sin momento dipolar. Por ejemplo, algunos aceites que no tienen momento dipolar son inmiscibles en agua.

La distribución de carga de algunas moléculas puede explicar el hecho de que algunas sustancias que no son estrictamente clasificadas como aceites no puedan disolverse en agua. ¿Quién no ha tenido la experiencia de morder una especia picante y no poder aliviar la sensación de picor bebiendo agua? La capsaicina, que es el compuesto químico activo de la pimienta y que está presente en los pimientos habaneros, serranos y piquillos, no se disuelve bien en agua fría a causa de su distribución de carga.[1] Sin embargo, la solubilidad de la capsaicina en agua crece con la adición de alcohol etílico; por ello, algunas personas se enfrían la boca con cerveza después de que han tomado especias picantes. Las moléculas de alcohol tienen un momento dipolar débil y se mezclan bien tanto con el agua como con la capsaicina. La capsaicina puede mezclarse también con aceites, algunas féculas y proteínas. En muchas culturas, se utiliza el arroz y la carne, en lugar del alcohol, para disolver la capsaicina.



Las moléculas del ingrediente activo de estas especias picantes no se disuelven en agua porque no tienen momentos dipolares eléctricos. *(Stockbyte Platinum/Getty Images.)*

La sensación desagradable que algunas personas perciben al comer pimienta se debe a la distribución de carga de las moléculas. La proteína TRPV1 es un receptor neuronal (neuroreceptor) presente en humanos que nos indica la temperatura de las sustancias calientes. La distribución de carga de esta proteína cambia a temperaturas superiores a los 43° C. Entonces, la forma de esta proteína es distinta (doblada y desplegada) según cambia la distribución de carga de su molécula.[2] La función de muchas proteínas viene determinada por el hecho de doblarse o desplegarse cuando se modifica su distribución de carga.[3] Un cambio en la distribución de carga en la TRPV1 arruga la molécula de proteína y transmite a las neuronas la información del cambio de temperatura así detectado. La capsaicina genera los mismos cambios que el calor en la distribución de carga de la proteína TRPV1,[4] siendo ésta la razón por la que la gente percibe la sensación producida por la pimienta como si fuera de calor. El jengibre es una especia "caliente" (picante) que contiene gingeroles que producen sensaciones en los receptores mediante cambios en la distribución de carga.[5] El mentol produce cambios en la distribución de carga de algunas proteínas que son neuroreceptores en humanos, generando señales de frío en el medio donde se desarrollan.[6] Por esta razón, la gente percibe frescor con el mentol.

Los cambios en la distribución de carga de las proteínas pueden cambiar su propia textura. El caviar salado, por ejemplo, cambia la distribución de carga de las proteínas dentro de los huevos de pescado. Cuando la proteína se desdobla, el fluido del interior del huevo se espesa y adquiere una textura cremosa.[7]

---

1 Turgut, C., Newby, B., and Cutright, T., "Determination of Optimal Water Solubility of Capsaicin for Its Usage as a Non-Toxic Antifoulant." *Environmental Science Pollution Research International*, Jan.-Feb. 2004, Vol. 11, No. 1, pp. 7–10.

2 Suydam, I. T., et al., "Electric Fields at the Active Site of an Enzyme: Direct Comparison of Experiment with Theory." *Science*, Jul. 14, 2006, Vol. 313, No. 5784, pp. 200–204.

3 Honig, B., and Nicholls, A., "Classical Electrostatics in Biology and Chemisty." *Science*, May 26, 1995, Vol. 268, p. 1144.

4 Montell, C., "Thermosensation: Hot Findings Make TRPNs Very Cool." *Current Biology*, Jun. 17, 2003, Vol. 13, No. 12, pp. R476–R478.

5 Dedov, V. N., et al., "Gingerols: A Novel Class of Vanilloid Receptor (VR1) Agonists." *British Journal of Pharmacology*, 2002, Vol. 137, pp. 793–798.

6 Montell, C., op. cit.

7 Sternin, V., and Dorè, I, *Caviar: The Resource Book*. Moscow: Cultura, 1993, in McGee, H., *On Food and Cooking: The Science and Lore of the Kitchen*. New York: Scribner, 2004.

Resumen

1. La ley de Gauss es una ley fundamental de la Física que es equivalente a la ley de Coulomb para cargas estáticas.
2. La ley de Gauss puede utilizarse para calcular el campo eléctrico en distribuciones de carga de gran simetría.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
1. Campo eléctrico para una distribución de carga continua	$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{k\hat{r}}{r^2}\, dq$ (ley de Coulomb) donde $dq = \rho\, dV$ para una carga distribuida en un determinado volumen, $dq = \sigma\, dA$ para una carga distribuida en una superficie, y $dq = \lambda\, dL$ para una carga distribuida a lo largo de una línea.	22.1*b*
2. Flujo eléctrico	$\phi = \lim_{\Delta A_i \to 0} \sum_i \vec{E}_i \cdot \hat{n}_i\, \Delta A_i = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA$	22.13
3. Ley de Gauss	$\phi_{\text{neto}} = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dA = \oint_S E_n\, dA = \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon_0}$ El flujo de campo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a la carga neta en su interior dividido por ϵ_0.	22.16
4. Constante k de Coulomb y permitividad del vacío ϵ_0	$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8{,}99 \times 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$	22.7
5. Ley de Coulomb y ley de Gauss	$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$ $\phi_{\text{neto}} = \oint_S E_n\, dA = \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon_0}$	22.5 22.16
6. Discontinuidad de E_n	En una superficie con una densidad de carga superficial σ, la componente del campo eléctrico perpendicular a la superficie es discontinua en el valor σ/ϵ_0. $E_{n+} - E_{n-} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$	22.20
7. Carga sobre un conductor	En equilibrio electrostático, la densidad de carga es cero en todo el interior del conductor. Si existe exceso o déficit de carga, se acumula en la superficie.	
8. Campo $\vec{E}$ en los puntos frontera fuera de un conductor	El campo eléctrico resultante justo fuera de la superficie de un conductor es perpendicular a la superficie y vale σ/ϵ_0, donde σ es la densidad de carga superficial en el punto considerado del conductor: $E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$	22.21
9. Campos eléctricos para diversas distribuciones de carga		
De una carga lineal infinita	$E_R = 2k\frac{\lambda}{R} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{R}$	22.6
En el eje de una carga anular	$E_z = \frac{kQz}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$	22.8
En el eje de un disco cargado	$E_z = \text{sign}(z) \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[1 - \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{-1}\right]$	22.9

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
De un plano infinito cargado	$E_z = \text{sign}(z) \cdot \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}$	22.10
De una esfera sólida cargada	$E_r = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q}{r^2} \quad r > R$	22.17*a*
	$E_r = 0 \quad r < R$	22.17*b*

Respuestas a las comprobaciones conceptuales

22.1 El campo $\vec{E}$ en la ley de Gauss es el campo eléctrico debido a todas las cargas. Sin embargo, el flujo del campo eléctrico generado por las cargas que están fuera de la superficie gausiana es cero, de tal forma que el flujo del campo eléctrico producido por todas las cargas es igual al que generan las cargas que están en el interior de dicha superficie.

Respuestas a los problemas prácticos

22.1 $E_x = k\lambda\left(\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{r_1}\right)$. Para $x > x_2$, $r_2 < r_1$; por lo tanto, $\dfrac{1}{r_2} > \dfrac{1}{r_1}$, lo cual significa que $E_x > 0$.

22.2 No. La simetría impone que E_z es cero para $z = 0$, mientras que la ecuación del paso 3 proporciona un valor negativo de E_z en $z = 0$. Estos resultados contradictorios no pueden ser ambos correctos.

22.3 Las unidades del SI para k, λ y R son $\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$, C/m y m, respectivamente. De esto se sigue que $k\lambda/R$ tiene unidades de $(\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(\text{C/m})(1/\text{m}) = \text{N/C}$.

22.4 $z = a/\sqrt{2}$

22.5 80%

Problemas

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben aportarse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

En los datos numéricos sin coma decimal se deben considerar significativos todos los dígitos, incluidos los ceros a la derecha del último diferente de cero.

• Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil

•• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos

••• Desafiante, para alumnos avanzados

SSM La solución se encuentra en el *Manual de soluciones*

Los problemas consecutivos que están sombreados son problemas relacionados.

PROBLEMAS CONCEPTUALES

1 • La figura 22.37 muestra un objeto en forma de L con lados iguales en longitud y cargado con una distribución uniforme de carga positiva. ¿Cuál es la dirección del campo eléctrico a lo largo de la línea discontinua que forma 45° con la horizontal? Explicar la respuesta. SSM

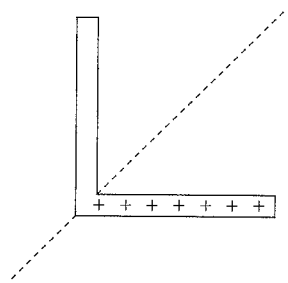


FIGURA 22.37
Problema 1

2 • Una carga positiva se distribuye uniformemente a lo largo del eje x y otra negativa se distribuye uniformemente a lo largo del eje y. La carga por unidad de longitud de ambas cargas es idéntica, excepto en el signo. Determinar la dirección del campo eléctrico en puntos de las líneas definidas por $y = x$ e $y = -x$. Explique su respuesta.

3 • Verdadero o falso:

(*a*) El campo eléctrico debido a una capa esférica fina, cargada uniformemente es cero en su interior, es decir, en la parte hueca.

(*b*) En equilibrio electrostático, el campo eléctrico en todos los puntos del interior de un conductor es cero.

(*c*) Si la carga neta de un conductor es cero, la densidad de carga deberá ser cero en cada punto de su superficie.

4 • Si el flujo a través de una superficie cerrada es cero, ¿deberá ser cero el campo eléctrico en todos los puntos de esta superficie? Si la respuesta es no, proponer un ejemplo sencillo. Con la información dada, ¿se puede determinar la carga neta en el interior de la superficie? Si la respuesta es sí, ¿cuál es esa carga?

5 • Verdadero o falso:

(*a*) La ley de Gauss se cumple sólo para distribuciones de carga simétricas.

(*b*) Que $E = 0$ en cualquier punto del interior de un conductor en condiciones de equilibrio electrostático puede deducirse de la ley de Gauss.

6 •• Se coloca una carga puntual q en el centro de un cubo imaginario y en el de una esfera, también imaginaria. Comparar el flujo eléctrico a través de la superficie del cubo con el flujo que atraviesa la superficie esférica. Explicar la respuesta.

7 ○○ Un dipolo eléctrico está completamente incluido en una superficie imaginaria cerrada y en el interior de esta superficie no existen otras cargas diferentes a las del dipolo. Verdadero o falso:

(*a*) El campo eléctrico es cero en cualquier punto de la superficie.
(*b*) El campo eléctrico es normal a la superficie en cualquiera de sus puntos.
(*c*) El flujo eléctrico a través de la superficie es cero.
(*d*) El flujo eléctrico a través de la superficie deberá ser positivo o negativo.
(*e*) El flujo eléctrico a través de un fragmento de la superficie puede no ser cero. SSM

8 ○○ Explicar por qué la intensidad del campo eléctrico crece linealmente con r, en lugar de decrecer inversamente con r^2, en los puntos del interior de una esfera sólida con densidad volúmica de carga uniforme (r es la distancia desde el centro al punto en el que se considera el campo.)

9 ○○ Suponer que la carga total de la capa o corteza esférica conductora de la figura 22.38 es cero. La carga negativa puntual en el centro tiene un valor absoluto igual a Q. ¿Cuál es la dirección del campo eléctrico en las siguientes regiones? (*a*) $r < R_1$, (*b*) $R_2 > r > R_1$, y (*c*) $r > R_2$. Explicar las respuestas. SSM

10 ○○ La corteza esférica de la figura 22.38 se conecta a tierra, y la carga puntual negativa en el centro es ahora igual a Q. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?

(*a*) La carga en la superficie interior de la corteza es $+Q$ y en la superficie exterior $-Q$.
(*b*) La carga en la superficie interior de la corteza es $+Q$ y en la exterior cero.
(*c*) La carga en ambas superficies de la corteza es $+Q$.
(*d*) La carga en ambas superficies de la corteza es cero.

11 ○○ La corteza esférica de la figura 22.38 se conecta a tierra, y la carga puntual negativa en el centro es ahora igual a $-Q$. ¿Cuál es la dirección del campo eléctrico en las siguientes regiones? (*a*) $r < R_1$, (*b*) $R_2 > r > R_1$, y (*c*) $r > R_2$. Justificar las respuestas.

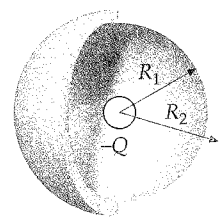


FIGURA 22.38 Problemas 9, 10 y 11

ESTIMACIONES Y APROXIMACIONES

12 ○○ En este capítulo, se deduce la expresión del campo eléctrico en el eje de un disco que está producido por el mismo cuando se carga uniformemente. En cualquier punto del eje, el módulo del campo eléctrico es $|E| = 2\pi k\sigma\left[1 - \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2}\right]$. Como a grandes distancias ($|z| \gg R$), se demostró que esta ecuación puede aproximarse a $E \approx kQ/z^2$. Muy cerca del disco, la intensidad del campo eléctrico es, aproximadamente, la misma que produce un plano infinito cargado. Suponer que se tiene un disco de 2,5 cm con una distribución superficial de carga uniforme de $|E| \approx 2\pi k\sigma$. Usar la expresión exacta y la aproximada, dadas anteriormente, para hallar la intensidad del campo en el eje a distancias de (*a*) 0,010 cm, (*b*) 0,040 cm y (*c*) 5,0 m. Comparar los dos valores en cada caso y comentar la validez desde un punto de vista cuantitativo según sea la distancia a la que se determina el campo.

CÁLCULO DEL CAMPO ELÉCTRICO $\vec{E}$ MEDIANTE LA LEY DE COULOMB

13 ○ Una carga lineal uniforme de densidad $\lambda = 3{,}5$ nC/m se distribuye desde $x = 0$ a $x = 5$ m. (*a*) ¿Cuál es la carga total? Determinar el campo eléctrico que se genera sobre el eje x en (*b*) $x = 6$ m, (*c*) $x = 9$ m y (*d*) $x = 250$ m. (*e*) Hallar el campo en $x = 250$ m usando la aproximación de que se trata de una carga puntual en el origen y comparar el resultado con el obtenido exactamente en (*d*). (Para hacer esto se necesita asumir que los valores dados en este problema son válidos para más de dos figuras significativas.) ¿El resultado obtenido es mayor o menor que el exacto? Explique sus respuestas. SSM

14 ○ Se colocan paralelamente dos láminas infinitas, cargadas y no conductoras. La lámina A está en el plano $x = -2{,}0$ m y la B en $x = +2{,}0$ m. Determinar el campo eléctrico en las regiones del espacio $x < 2{,}0$ m, $x > 2{,}0$ m y en la comprendida entre las dos láminas en los siguientes casos: (*a*) cada plano posee una densidad de carga superficial uniforme $\sigma = +3\ \mu\text{C/m}^2$ y (*b*) el plano izquierdo tiene una densidad de carga $\sigma = +3\ \mu\text{C/m}^2$ y el derecho $\sigma = -3\ \mu\text{C/m}^2$. (*c*) Dibujar las líneas de campo eléctrico en cada caso.

15 ○ Una carga de 2,75 μC está uniformemente distribuida sobre un anillo de radio 8,5 cm. Determinar el campo eléctrico generado sobre el eje a (*a*) 1,2 cm, (*b*) 3,6 cm y (*c*) 4,0 m del centro del anillo. (*d*) Determinar el campo a 4,0 m con la aproximación de que el anillo es una carga puntual en el origen y comparar el resultado con el obtenido en (*c*). Explique su respuesta.

16 ○ Un disco no conductor de radio R está ubicado en el plano $z = 0$ con su centro en el origen. El disco tiene una densidad superficial de carga uniforme σ. Hallar el valor de z para el cual $E_z = \sigma/(4\epsilon_0)$. Obsérvese que en esta distancia, la intensidad del campo eléctrico es la mitad que el evaluado en puntos del eje x muy cerca del disco.

17 ○ Un anillo de radio a está en el plano $z = 0$ con su centro en el origen. El anillo está uniformemente cargado y tiene una carga total Q. Calcular E_z en el eje en (*a*) $z = 0{,}2a$, (*b*) $z = 0{,}5a$, (*c*) $z = 0{,}7a$, (*d*) $z = a$, y (*e*) $z = 2a$. (*f*) Usar estos resultados para hacer una gráfica de E_z versus z para valores positivos y negativos de z. (Asumir que estas distancias son exactas.) SSM

18 ○ Un disco de radio a está en el plano $z = 0$ con su centro en el origen. El disco está uniformemente cargado y tiene una carga total Q. Hallar E_z en el eje en (*a*) $z = 0{,}2a$, (*b*) $z = 0{,}5a$, (*c*) $z = 0{,}7a$, (*d*) $z = a$, y (*e*) $z = 2a$. (*f*) Usar estos resultados para hacer una gráfica de E_z versus z para valores positivos y negativos de z. (Asumir que estas distancias son exactas.)

19 ○○ **HOJA DE CÁLCULO** (*a*) Un disco de radio 30 cm es portador de una densidad de carga uniforme $\sigma = 0{,}5$ nC/m². (*a*) Representar gráficamente el campo eléctrico generado en el eje del disco utilizando una **hoja de cálculo**. (*b*) Comparar la aproximación $E = 2\pi k\sigma$ (fórmula para la intensidad del campo eléctrico de una lámina infinita uniformemente cargada) con la expresión exacta del campo eléctrico. ¿A qué distancia la aproximación difiere de la solución exacta en un 10%?

20 ○○ (*a*) Demostrar que el campo E generado en el eje de una carga anular de radio a tiene sus valores máximos en $z = \pm a/\sqrt{2}$. (*b*) Representar E en función de z para valores positivos y negativos de z. (*c*) Determinar el valor máximo de E.

21 ○○ Una línea cargada con densidad de carga λ está localizada en el eje x desde $x = x_1$ hasta $x = x_2$, siendo $x_1 < x_2$. Demostrar que la componente x del campo eléctrico en un punto del eje y viene dada por $E_x = \frac{k\lambda}{y}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$, donde $\theta_1 = \text{arctg}(x_1/y)$, $\theta_2 = \text{arctg}(x_2/y)$, e $y \neq 0$.

22 ●● Un anillo de radio a contiene una distribución de carga lineal de la forma $\lambda\theta = \lambda_0$ sen θ, tal como muestra la figura 22.39. (*a*) ¿Qué dirección tiene el campo generado en el centro del anillo? (*b*) ¿Cuál es el módulo de dicho campo en el centro del anillo?

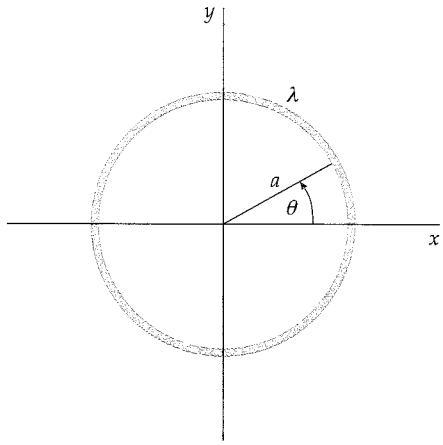


FIGURA 22.39 Problema 22

23 ●● Una densidad de carga lineal uniforme λ está situada sobre el eje x desde $x = 0$ a $x = a$. Demostrar que la componente x del campo eléctrico en un punto del eje y viene dada por $E_y = \dfrac{k\lambda}{y}\dfrac{a}{\sqrt{y^2 + a^2}}$, $y \neq 0$.

24 ●●● Calcular el campo eléctrico a distancia z de una lámina no conductora infinita y cargada uniformemente considerando la lámina como una serie continua de infinitas líneas rectas cargadas.

25 ●● Calcular el campo eléctrico a distancia z de una lámina no conductora infinita y cargada uniformemente considerando la lámina como una serie continua de anillos circulares cargados. SSM

26 ●●● Una corteza delgada hemisférica de radio R posee una carga de densidad superficial uniforme σ. Determinar el campo eléctrico en el centro de la corteza hemisférica ($r = 0$).

LEY DE GAUSS

27 ● Consideremos un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = (2{,}00\ \text{kN/C})\hat{\imath}$. (*a*) ¿Cuál es el flujo de este campo que atraviesa un cuadrado de 10 cm de lado cuyo plano es paralelo al plano yz? (*b*) ¿Cuál es el flujo que atraviesa el mismo cuadrado si la normal a su plano forma un ángulo de 30° con el eje x?

28 ● Una sola carga puntual $q = +2\ \mu$C está en el origen. Una superficie esférica de 3,0 m de radio tiene su centro en el eje x en el punto $x = 5$ m. (*a*) Dibujar las líneas de campo correspondientes a esta carga puntual (en dos dimensiones) asumiendo que 12 líneas de campo igualmente espaciadas en el plano xy salen de la carga, habiendo una línea en la dirección $+x$. ¿Hay líneas que entran en la superficie esférica? Si la respuesta es sí, ¿cuántas? (*b*) ¿Cuál es el número neto de líneas que salen de la superficie esférica? Si la respuesta es sí, ¿cuántas? (*c*) Contando que las líneas que entran se contabilizan como flujo negativo y las que salen, como positivo, ¿cuál es el flujo neto del campo eléctrico debido a la carga puntual que atraviesa la superficie esférica?

29 ● Un campo eléctrico dado por $\vec{E} = \text{sign}(x)\cdot(300\ \text{N/C})\hat{\imath}$, donde sign($x$) es igual a: -1 si $x < 0$, 0 si $x = 0$ y $+1$ si $x > 0$. Un cilindro circular recto de 20 cm de longitud y 4 cm de radio tiene su centro en el origen y su eje está situado a lo largo del eje x de modo que una de las bases está en $x = +10$ cm y la otra en $x = -10$ cm. (*a*) ¿Cuál es el flujo saliente que atraviesa cada base? (*b*) ¿Cuál es el flujo que atraviesa la superficie curvada (lateral) del cilindro? (*c*) ¿Cuál es el flujo neto que atraviesa toda la superficie cilíndrica? (*d*) ¿Cuál es la carga neta en el interior del cilindro? SSM

30 ● Medidas cuidadosas del campo eléctrico en la superficie de una caja negra indican que el flujo neto que sale de la superficie de la caja es 6,0 kN · m²/C. (*a*) ¿Cuál es la carga neta en el interior de la caja? (*b*) Si el flujo neto que sale de la superficie de la caja fuese cero, ¿podría obtenerse la conclusión de que no hay ninguna carga en el interior de la caja? Explique sus respuestas.

31 ● Una carga puntual $q = +2\ \mu$C está en el centro de una esfera de 0,5 m de radio. (*a*) Hallar el área superficial de la esfera. (*b*) Hallar el valor del campo eléctrico generado en los puntos situados en la superficie de la esfera. (*c*) ¿Cuál es el flujo del campo eléctrico debido a la carga puntual que atraviesa la superficie de la esfera? (*d*) ¿Variaría la respuesta dada en el apartado (*c*) si se moviese la carga puntual de modo que estuviese dentro de la esfera pero no en el centro? (*e*) ¿Cuál es el flujo neto que atraviesa un cubo de 1 m de arista que circunscribe la esfera?

32 ● ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de una cara de un cubo que tiene una carga puntual de $-3{,}00\ \mu$C en su centro? *Ayuda: no es necesario hacer ninguna integral para resolver este problema.*

33 ● Una carga puntual está colocada en el centro de un cubo imaginario de 20 cm de lado. El flujo eléctrico que sale de una de sus caras es $-1{,}50$ kN · m²/C. ¿Cuánta carga hay en su centro? SSM

34 ●● Dado que tanto en la ley de Newton de la gravedad como en la de Coulomb, las fuerzas varían de forma inversamente proporcional a los cuadrados de las distancias de los elementos interactuantes, es posible determinar una expresión análoga a la ley de Gauss para los campos gravitatorios. El campo gravitatorio $\vec{g}$ en un punto es la fuerza por unidad de masa para una masa testigo m_0 colocada en ese punto. (Por lo tanto, para una masa m en el origen, el campo gravitatorio g en una posición $\hat{r}$ es $\vec{g} = -(Gm/r^2)\hat{r}$.) Calcular el flujo del campo gravitatorio que atraviesa una superficie esférica de radio r centrada en el origen y demostrar que la ecuación análoga gravitatoria de la ley de Gauss es $\phi_{\text{neto}} = -4\pi G m_{\text{interna}}$.

35 ●● El cono imaginario de la figura 22.40 tiene un ángulo θ entre la generatriz y la base de radio R. Este cono está libre de carga y en él existe un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ (las líneas de campo son verticales y paralelas al eje del cono). ¿Cuál es la relación entre el número de líneas de campo por unidad de área que penetran por la base con respecto de las que entran por la superficie lateral (cónica) de este cono? Utilizar el teorema de Gauss para dar una respuesta. (Las líneas de campo en la figura son sólo una muestra representiva.)

36 ●● En una región particular de la atmósfera terrestre, se ha medido el campo eléctrico sobre la superficie de la Tierra resultando ser de 150 N/C a una altura de 250 m y de 170 N/C a 400 m, en ambos casos dirigido hacia abajo. Calcular la densidad de carga volúmica de la atmósfera suponiendo que es uniforme entre 250 y 400 m. (Puede despreciarse la curvatura de la Tierra. ¿Por qué?)

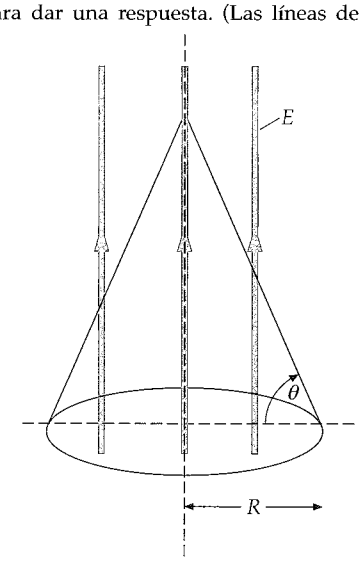


FIGURA 22.40 Problema 35

APLICACIONES DE LA LEY DE GAUSS EN SITUACIONES DE SIMETRÍA ESFÉRICA

37 ○ Una corteza esférica de radio R_1 posee una carga total q_1 uniformemente distribuida en su superficie. Una segunda corteza esférica mayor de radio R_2 concéntrica con la anterior posee una carga q_2 uniformemente distribuida en su superficie. (*a*) Utilizar la ley de Gauss para hallar el campo eléctrico en las regiones $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ y $r > R_2$. (*b*) ¿Cuál deberá ser el cociente de las cargas q_1 / q_2 y su signo relativo para que el campo eléctrico sea cero para $r > R_2$? (*c*) Hacer un esquema de las líneas de fuerza para el caso indicado en el apartado (*b*) cuando q_1 es positiva.

38 ○ Una corteza esférica de radio 6 cm posee una densidad superficial uniforme de carga $\sigma = 9$ nC/m². (*a*) ¿Cuál es la carga total sobre la corteza? Determinar el campo eléctrico en (*b*) $r = 2$ cm, (*c*) $r = 5{,}9$ cm, (*d*) $r = 6{,}1$ cm y (*e*) $r = 10$ cm.

39 ○○ Una esfera de radio 6 cm posee una densidad de carga volúmica uniforme $\rho = 450$ nC/m³. (*a*) ¿Cuál es la carga total de la esfera? Determinar el campo eléctrico en (*b*) $r = 2$ cm, (*c*) $r = 5{,}9$ cm, (*d*) $r = 6{,}1$ cm y (*e*) $r = 10$ cm. SSM

40 ○○ Consideremos dos esferas conductoras concéntricas (figura 22.41). La esfera exterior es hueca y en ella se ha depositado una carga $-7Q$. La esfera interior es sólida y en ella hay una carga $+2Q$. (*a*) ¿Cómo está distribuida la carga en la esfera exterior? Es decir, ¿cuánta carga hay en la superficie exterior y cuánta en la superficie interior? (*b*) Supongamos que se conecta un alambre entre ambas esferas. Una vez alcanzado el equilibrio electrostático, ¿cuánta carga total existe en la esfera exterior? ¿Cuánta carga hay ahora en la superficie exterior de esta esfera y cuánta carga en su superficie interna? ¿Cambia el campo eléctrico de la superficie de la esfera interna al conectar el cable? Si es así, ¿cómo cambia? (*c*) Supongamos que volvemos a las condiciones iniciales de (*a*) con $+2Q$ en la esfera interior y $-7Q$ en la exterior. Conectamos ahora la esfera interior a tierra con un cable y luego lo desconectamos. ¿Cuánta carga total existirá en la esfera sólida? ¿Cuánta carga tendremos en la superficie interna de la esfera exterior y cuánta en la superficie externa?

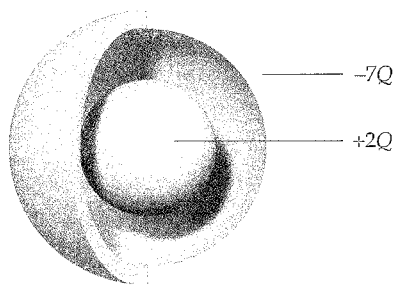


FIGURA 22.41
Problema 40

41 ○○ Una esfera no conductora de radio $R = 0{,}1$ m posee una densidad de carga volúmica uniforme. El módulo del campo eléctrico en $\rho = 2R$ es 1883 N/C. (*a*) ¿Cuál es la densidad de carga volúmica? (*b*) Determinar el módulo del campo eléctrico en $r = 0{,}5R$ desde el centro de la esfera.

42 ○○ Una esfera sólida no conductora de radio R posee una densidad de carga volúmica proporcional a la distancia desde el centro: $\rho = Ar$ para $r \leq R$, siendo A una constante; $r = 0$ para $r > R$. (*a*) Hallar la carga total de la esfera. (*b*) Hallar el campo eléctrico E_r, generado tanto en el interior como en el exterior de la distribución de carga y representar E_r en función de r. (*c*) Dibujar una gráfica del módulo del campo eléctrico como función de la distancia r medida desde el centro de la esfera.

43 ○○ Una esfera de radio R contiene una densidad de carga volúmica $\rho = B/r$ para $r < R$, donde B es una constante y $\rho = 0$ para $r > R$. (*a*) Determinar la carga total de la esfera. (*b*) Hallar las expresiones del campo eléctrico dentro y fuera de la distribución de carga. (*c*) Hacer una gráfica del módulo del campo eléctrico en función de la distancia al centro de la esfera. SSM

44 ○○ Una esfera de radio R contiene una densidad de carga volúmica $\rho = C/r^2$ para $r < R$, donde C es una constante y $\rho = 0$ para $r > R$. (*a*) Hallar la carga total de la esfera. (*b*) Obtener las expresiones del campo eléctrico dentro y fuera de la distribución de carga. (*c*) Dibujar una gráfica del módulo del campo eléctrico en función de la distancia al centro de la esfera.

45 ○○○ Una corteza esférica no conductora y gruesa de radio interior a y de radio exterior b posee una densidad ρ de carga volúmica uniforme. (*a*) Calcular la carga total. (*b*) Determinar el campo eléctrico en todos los puntos.

APLICACIONES DE LA LEY DE GAUSS EN SITUACIONES DE SIMETRÍA CILÍNDRICA

46 ○ **PÓNGALO EN SU CONTEXTO, APLICACIÓN A LA INGENIERÍA** Un contador Geiger es un típico aparato de un laboratorio de Física Nuclear que sirve para detectar radiación. Este instrumento está constituido por un tubo cilíndrico que tiene un hilo recto de metal a lo largo de su eje central. El diámetro del hilo debe ser de 0,500 mm y el diámetro interior del tubo de 4,00 cm. El tubo se llena de un gas diluido en el que se establece una descarga eléctrica con la que se produce la ruptura dieléctrica que sucede cuando el campo eléctrico alcanza $5{,}50 \times 10^6$ N/C. Determinar la máxima densidad de carga lineal que tiene que llevar el hilo para que no se produzca la ruptura dieléctrica. Asumir que el tubo y el hilo son infinitamente largos.

47 ○○○ En el problema 46, suponer que la radiación ionizante produce un ion y un electrón a la distancia de 1,50 cm desde el eje del hilo central del tubo de Geiger. Suponer que el hilo central está positivamente cargado con una densidad lineal de carga igual a 76,5 pC/m. (*a*) En este caso, ¿qué velocidad adquirirá el electrón cuando impacte con el hilo? (*b*) ¿Cómo será la velocidad del electrón comparada con la velocidad final del ion cuando impacte fuera del cilindro? Explique sus respuestas.

48 ○○ Demostrar que el campo eléctrico debido a una corteza cilíndrica uniformemente cargada e infinitamente larga de radio R y que posee una densidad de carga superficial σ, viene dado por: $E = 0$ cuando $0 \leq R < a$ y $E_R = \sigma a/(\epsilon_0 R)$ cuando $R > a$.

49 ○ Una corteza cilíndrica de longitud 200 m y radio 6 cm posee una densidad de carga superficial uniforme $\sigma = 9$ nC/m². (*a*) ¿Cuál es la carga total en la corteza? Hallar el campo eléctrico en (*b*) $r = 2$ cm, (*c*) $r = 5{,}9$ cm, (*d*) $r = 6{,}1$ cm y (*e*) $r = 10$ cm. (Utilizar los resultados del problema 48.)

50 ○○ Un cilindro no conductor infinitamente largo de radio R posee una densidad de carga volúmica uniforme $\rho(r) = \rho_0$. Demostrar que el campo eléctrico viene dado por $E_R = \rho_0 R/(2\epsilon_0)$ cuando $0 \leq R < a$, y por $E_R = \rho_0 a^2/(2\epsilon_0 R)$ cuando $R > a$, donde R es la distancia desde el eje del cilindro.

51 ○○ Un cilindro de longitud 200 m y radio 6 cm posee una densidad de carga volúmica uniforme $\rho = 300$ nC/m³. (*a*) ¿Cuál es la carga total del cilindro? Utilizar las fórmulas dadas en el problema 50 para determinar el campo eléctrico en un punto equidistante de los extremos en (*b*) $r = 2$ cm, (*c*) $r = 5{,}9$ cm, (*d*) $r = 6{,}1$ cm y (*e*) $r = 10$ cm. SSM

52 •• Consideremos dos cortezas cilíndricas concéntricas infinitamente largas. La corteza interior tiene un radio R_1 y posee una densidad de carga superficial uniforme σ_1, mientras que la exterior tiene un radio R_2 y una densidad de carga superficial uniforme σ_2. (*a*) Utilizar la ley de Gauss para hallar el campo eléctrico en las regiones $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ y $r > R_2$. (*b*) ¿Cuál deberá ser el cociente de las densidades σ_2/σ_1 y el signo relativo de ambas para que el campo eléctrico existente sea cero cuando $r > R_2$? ¿Cuál es entonces el campo eléctrico entre las cortezas? (*c*) Hacer un esquema de las líneas de campo en el caso indicado en el apartado (*b*) considerando σ_1 positivo.

53 •• La figura 22.42 muestra la sección trasversal de una porción de un cable concéntrico infinitamente largo. El conductor interno posee una carga de 6 nC/m; mientras que el conductor externo está descargado. (*a*) Determinar el campo eléctrico para todos los valores de R, siendo R la distancia desde el eje del sistema cilíndrico. (*b*) ¿Cuáles son las densidades superficiales de carga sobre las superficies interior y exterior del conductor externo?

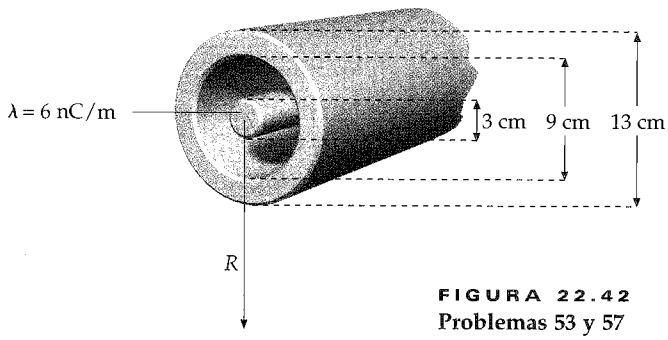


FIGURA 22.42
Problemas 53 y 57

54 •• Un cilindro no conductor, de longitud infinita y radio R contiene una distribución de carga $\rho(r) = ar$, siendo a constante. (*a*) Demostrar que la carga por unidad de longitud es $\lambda = 2\pi a R^3/3$. (*b*) Hallar las expresiones del campo eléctrico generado por este cilindro en todos los puntos del espacio, es decir, una expresión para $r < R$ y otra para $r > R$.

55 •• Un cilindro de radio a, sólido, infinitamente largo y no conductor, contiene una densidad volúmica de carga distribuida no uniformemente. Esta densidad varía con respecto de la distancia al eje del cilindro, medida sobre su perpendicular, según la expresión $\rho(R) = bR^2$, donde b es una constante. (*a*) Demostrar que la densidad lineal de carga del cilindro es $\lambda = \pi b a^4/2$. (*b*) Obtener expresiones del campo eléctrico $R < a$ y $R > a$. SSM

56 ••• Una corteza cilíndrica no conductora, gruesa e infinitamente larga, de radio interior a y radio exterior b, posee una densidad de carga volúmica uniforme ρ. Determinar el campo eléctrico en todos los puntos.

57 ••• Supongamos que el cilindro interno de la figura 22.42 está construido con un material no conductor y posee una distribución de carga volúmica dada por $\rho(r) = C/r$, donde $C = 200$ nC/m³. El cilindro externo es metálico. (*a*) Determinar la carga por metro que posee el cilindro interno (es decir, la densidad lineal de carga). (*b*) Calcular el campo eléctrico para todos los valores de R. SSM

CARGA Y CAMPO EN SUPERFICIES DE CONDUCTORES

58 • Una moneda descargada está en el interior de un campo eléctrico externo de valor 1,6 kN/C cuya dirección es perpendicular a sus caras. (*a*) Hallar la densidad de carga en cada cara de la moneda suponiendo que son planas. (*b*) Si el radio de la moneda es 1 cm, ¿cuál es la carga total de una cara?

59 • Una estrecha lámina metálica sin carga tiene caras cuadradas de 12 cm de lado. Se coloca dentro de un campo eléctrico externo que es perpendicular a sus caras. ¿Cuál es el valor del campo eléctrico si la carga total inducida en una de las caras del bloque es 1,2 nC?

60 • Una carga de −6 nC se coloca uniformemente en una lámina cuadrada de material no conductor de 20 cm de lado situada en el plano yz. (*a*) ¿Cuál es la densidad superficial de carga σ? (*b*) ¿Cuál es el valor del módulo del campo eléctrico en las proximidades de la lámina y cerca de su centro?

61 • Una corteza conductora esférica con una carga neta cero tiene un radio interior a y un radio exterior b. Se coloca una carga puntual q en el centro de la corteza. (*a*) Utilizar la ley de Gauss y las propiedades de los conductores en equilibrio para hallar el campo eléctrico en cada una de las regiones $r < a$, $a < r < b$ y $b < r$. (*b*) Dibujar las líneas de campo eléctrico para este caso. (*c*) Determinar la densidad de carga en la superficie interna ($r = a$) y en la superficie externa ($r = b$) de la corteza.

62 •• El campo eléctrico justo por encima de la superficie de la Tierra, medido experimentalmente, es de 150 N/C, dirigido hacia abajo. (*a*) ¿Cuál es el signo de la carga neta en la superficie de la Tierra en estas condiciones? (*b*) A partir de este dato, ¿qué carga total se puede estimar que exista sobre la superficie de Tierra?

63 •• Una carga puntual positiva de 2,5 μC se encuentra en el centro de una corteza conductora esférica sin carga, de radio interior 60 cm y de radio exterior 90 cm. (*a*) Determinar las densidades de carga de las superficies interior y exterior de la corteza y la carga total de cada superficie. (*b*) Determinar el campo eléctrico generado en cualquier punto. (*c*) Repetir (*a*) y (*b*) para el caso en que se añade una carga neta de + 3,5 μC a la corteza. SSM

64 •• Si el módulo de un campo eléctrico situado en la atmósfera es 3×10^6 N/C, el aire se ioniza y comienza a conducir la electricidad. Este fenómeno se denomina ruptura dieléctrica. Una carga de 18 μC se sitúa en una esfera conductora. ¿Cuál es el radio mínimo de una esfera que pueda soportar esta carga sin que se produzca la ruptura dieléctrica?

65 •• Una lámina conductora cuadrada con lados de 5 m es portadora de una carga neta de 80 μC. (*a*) Determinar la densidad de carga de cada cara de la lámina y el campo eléctrico justo en el exterior de una cara de la lámina. (*b*) La lámina se sitúa a la derecha de un plano infinito no conductor, cargado con una densidad de 2,0 μC/m² y de modo que las caras de la lámina son paralelas al plano. Determinar el campo eléctrico en cada cara de la lámina lejos de los bordes y la densidad de carga de cada cara. SSM

PROBLEMAS GENERALES

66 •• Consideremos las tres esferas metálicas concéntricas de la figura 22.43. La esfera I es sólida con el radio R_1. La esfera II es hueca con el radio R_2 más interno y el radio R_3 externo. La esfera III es hueca con radio

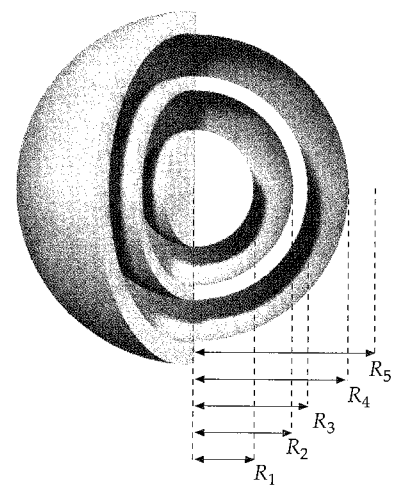


FIGURA 22.43
Problema 66

R_4 más interno y radio R_5 externo. Inicialmente las tres esferas tienen una carga nula. A continuación, añadimos una carga $-Q_0$ a la esfera I y una carga positiva $+Q_0$ a la esfera III. (*a*) Una vez que las cargas han alcanzado el equilibrio, el campo eléctrico en el espacio comprendido entre las esferas I y II, ¿está dirigido hacia el centro, se aleja del centro o ninguna de ambas cosas? (*b*) ¿Cuánta carga existirá en la superficie interna de la esfera II? Especificar su signo. (*c*) ¿Cuánta carga existirá en la superficie externa de la esfera II? (*d*) ¿Cuánta carga existirá en la superficie interna de la esfera III? (*e*) ¿Cuánta carga existirá en la superficie externa de la esfera III? (*f*) Representar E en función de r para todo valor de r.

67 ◦◦ Sobre el plano yz tenemos una carga superficial no uniforme. En el origen, la densidad de carga superficial es $\sigma = 3{,}10\ \mu\text{C/m}^2$. En el espacio existen otras distribuciones de carga. Justo a la derecha del origen, la componente x del campo eléctrico es $E_x = 4{,}65 \times 10^5$ N/C. ¿Cuál es el valor de E_x justo a la izquierda del origen? SSM

68 ◦◦ Una carga lineal infinita de densidad lineal uniforme $\lambda = -1{,}5\ \mu\text{C/m}$ es paralela al eje y en $x = -2$ m. Una carga puntual de $1{,}3\ \mu$C está localizada en $x = 1$ m, $y = 2$ m. Determinar el campo eléctrico en $x = 2$ m, y $= 1{,}5$ m.

69 ◦◦ Un capa esférica fina de radio R (figura 22.44*a*) tiene una carga total Q. Un pequeño trozo circular es extraído de la superficie. (*a*) ¿Cuál es el valor del módulo, dirección y sentido del campo eléctrico en el centro del hueco que deja el "tapón" extraído? (*b*) Utilizando el resultado del apartado (*a*), calcular la fuerza eléctrica sobre el "tapón" cuando se vuelve a colocar en el hueco (figura 22.44*b*). (*c*) A partir de estos últimos resultados, calcular la "presión electrostática" (fuerza/unidad de área) existente en toda la esfera. SSM

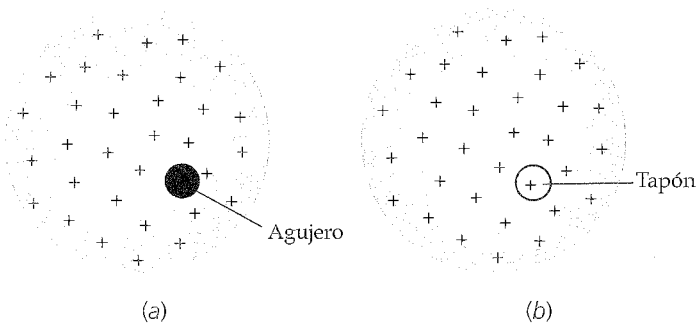


FIGURA 22.44 Problema 69

70 ◦◦ Una lámina fina e infinita colocada en el plano $y = 0$ tiene una densidad de carga superficial uniformemente cargada $\sigma_1 = +65\ \text{nC/m}^2$. Una segunda lámina fina e infinita tiene una densidad superficial uniforme de carga $\sigma_2 = +45\ \text{nC/m}^2$ La intersección de las dos láminas se produce en el eje z formando un ángulo de 30° con el plano xz, tal como se muestra en la figura 22.45. Determinar el campo eléctrico en (*a*) $x = 6{,}0$ m, $y = 2{,}0$ m y (*b*) $x = 6{,}0$ m, $y = 5{,}0$ m.

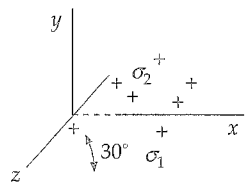


FIGURA 22.45 Problema 70

71 ◦◦◦ Dos placas idénticas cuadradas de metal, de 500 cm², están paralelas y separadas 1,50 cm. Inicialmente, están descargadas y, posteriormente, se transfiere una carga de 1,50 nC desde la placa de la izquierda a la de la derecha, produciéndose enseguida el equilibrio electrostático. (Despreciar efectos de borde.) (*a*) ¿Cuánto vale el campo eléctrico entre las placas a una distancia de 0,25 cm de la placa de la derecha? (*b*) ¿Qué valor alcanza el campo eléctrico entre las placas a una distancia de 1,00 cm de la placa de la izquieda? (*c*) ¿Cuál es el campo eléctrico justo a la derecha de la placa de la derecha? SSM

72 ◦◦ Dos planos no conductores infinitos de carga uniformemente distribuida son paralelos entre sí y paralelos al plano yz. Uno de ellos corresponde a $x = -2$ m y su densidad superficial de carga es $\sigma = -3{,}5\ \mu\text{C/m}^2$. El otro corresponde a $x = 2$ m y $\sigma = 6{,}0\ \mu\text{C/m}^2$. Determinar el campo eléctrico para (*a*) $x < -2$ m, (*b*) $-2\ \text{m} < x < 2$ m y (*c*) $x > 2$ m.

73 ◦◦◦ La mecánica cuántica considera que el electrón del átomo de hidrógeno no es puntual, sino que le asigna una distribución de carga extendida en todo el espacio cuya expresión es $\rho(r) = -\rho_0 e^{-2r/a}$, donde r es la distancia al centro del núcleo, y a es el denominado radio de Bohr ($a = 0{,}0529$ nm). Recordar que el núcleo de un átomo de hidrógeno está formado por un protón que es una carga unidad positiva que se puede considerar puntual. (*a*) Calcular ρ_0 considerando que el átomo tiene carga total cero. (*b*) Calcular el campo eléctrico generado a una distancia r del núcleo. Considerar el protón como una carga puntual. SSM

74 ◦◦ Un anillo de radio R que se encuentra en el plano horizontal (xy) posee una carga $-Q$ distribuida uniformemente en toda su longitud. Una masa m posee una carga q de signo opuesto al de Q y está localizada en el eje del anillo. (*a*) ¿Cuál es el valor mínimo de q/m para que la masa m se encuentre en equilibrio bajo la acción de las fuerzas gravitatoria y electrostática? (*b*) Si q/m es el doble del valor calculado en (*a*), ¿dónde se encuentra la masa al alcanzar el equilibrio? Expresar los resultados en función de R.

75 ◦◦ Una barra de plástico, no conductora, larga y delgada, se dobla formando un bucle de radio R. Entre los extremos de la barra queda un hueco de longitud l ($l << R$). Una carga Q se distribuye por igual sobre la barra. (*a*) Indicar la dirección y el sentido del campo eléctrico en el centro del bucle. (*b*) Determinar el módulo del campo eléctrico generado en el centro del bucle.

76 ◦◦ Una esfera sólida de 1,2 m de diámetro con su centro sobre el eje x en $x = 4$ m, tiene una carga volúmica uniforme de densidad $\rho = 5\ \mu\text{C/m}^3$. Una corteza esférica concéntrica con la esfera tiene un diámetro de 2,4 m y una densidad de carga superficial uniforme $\sigma = -1{,}5\ \mu\text{C/m}^2$. Calcular el módulo, la dirección y el sentido del campo eléctrico en (*a*) $x = 4{,}5$ m, $y = 0$; (*b*) $x = 4{,}0$ m, $y = 1{,}1$ m y (*c*) $x = 2{,}0$ m, $y = 3{,}0$ m.

77 ◦◦ Un plano infinito cargado de densidad superficial $\sigma_1 = 3\ \mu\text{C/m}^2$ es paralelo al plano xz en $y = -0{,}6$ m. Un segundo plano infinito cargado de densidad superficial $\sigma_2 = -2\ \mu\text{C/m}^2$ es paralelo al plano yz en $x = 1$ m. Una estrecha capa o cáscara esférica no conductora de radio 1 m con su centro en el plano xy en la intersección de los planos cargados posee una densidad de carga superficial $\sigma_3 = -3\ \mu\text{C/m}^2$. Determinar el módulo, dirección y sentido del campo eléctrico en el eje x en (*a*) $x = 0{,}4$ m y (*b*) $x = 2{,}5$ m.

78 ◦◦ Un plano infinito paralelo al plano yz en $x = 2$ m posee una densidad de carga superficial uniforme $\sigma = 2\ \mu\text{C/m}^2$. Una carga lineal infinita de densidad uniforme $\lambda = 4\ \mu\text{C/m}$ pasa por el origen formando un ángulo de 45° con el eje x en el plano xy. Una esfera sólida no conductora con una densidad de carga volúmica $\rho = -6\ \mu\text{C/m}^3$ y radio 0,8 m está centrada sobre el eje x en $x = 1$ m. Calcular el módulo, la dirección y el sentido del campo eléctrico en el plano xy en $x = 1{,}5$ m, $y = 0{,}5$ m.

79 ◦◦ Una densidad lineal de carga infinita λ está localizada a lo largo del eje z. Una masa m que posee una carga q de signo opuesto al de λ, se encuentra en una órbita circular en el plano xy alrededor de la carga lineal. (*a*) Deducir una expresión para la velocidad de la partícula. (*b*) Deducir una expresión para el periodo de la órbita en función de m, q, R y λ, siendo R el radio de la órbita. SSM

80 ●● Un anillo de radio R que se encuentra en el plano yz posee una carga Q uniformemente distribuida en toda su longitud. En el centro del anillo se encuentra una partícula de masa m que posee una carga negativa q. (*a*) Demostrar que si $x << R$, el campo eléctrico a lo largo del eje del anillo es proporcional a x. (*b*) Determinar la fuerza que actúa sobre la masa m en función de x. (*c*) Demostrar que si damos a m un pequeño desplazamiento en la dirección x, realizará un movimiento armónico simple. (*d*) Calcular el periodo de dicho movimiento.

81 ●● Cuando las cargas Q y q del problema 80 son 5 μC y -5 μC, respectivamente, y el radio del anillo es 8,0 cm, la masa m oscila alrededor de su posición de equilibrio con una frecuencia angular de 21 rad/s. ¿Cuál es la masa de la partícula? Determinar la frecuencia angular de oscilación de la masa si el radio del anillo se duplica a 16 cm y todos los demás parámetros permanecen sin modificar. SSM

82 ●● Dadas las condiciones iniciales del problema 80, determinar la frecuencia angular de oscilación de la masa si el radio del anillo se duplica a 16 cm, mientras que la densidad de carga lineal del anillo permanece constante.

83 ●●● Una esfera no conductora de radio a y con centro en el origen está uniformemente cargada con una distribución de carga ρ. (*a*) Demostrar que el campo eléctrico en un punto del interior de dicha esfera a una distancia r del centro es $\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r\hat{r}$. (*b*) Se extrae un trozo de la esfera, dejando una cavidad esférica de radio $b = R/2$, cuyo centro está a una distancia $b = R/2$ del de la esfera inicial, tal como indica la figura 22.46. Calcular el campo eléctrico en los puntos 1 y 2 mostrados en la figura 22.46. *Sugerencia: reemplazar el conjunto esfera-cavidad por dos esferas que tengan la misma densidad de carga uniforme pero con signos opuestos.*

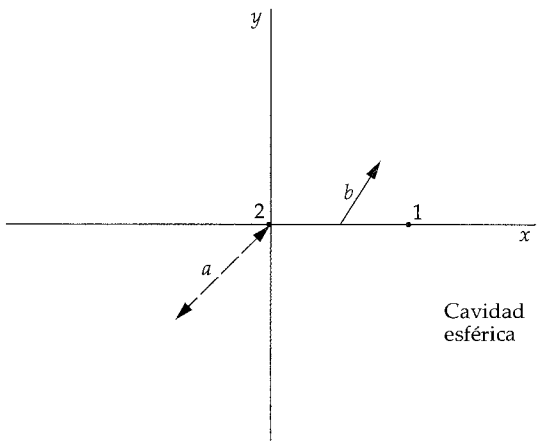


FIGURA 22.46 Problemas 83 y 85

84 ●●● Demostrar que el campo existente en cualquier punto del interior de la cavidad del problema 83*b* viene dado por $\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} b\hat{i}$.

85 ●●● La cavidad en el problema 83*b* se llena de un material no conductor con una carga total Q. Calcular de nuevo el campo eléctrico en los puntos 1 y 2 de la figura 22.46.

86 ●●● Una *pequeña* superficie gausiana en forma de cubo con caras paralelas a los planos xy, xz e yz (figura 22.47) está en una región en la que el campo eléctrico es paralelo al eje x. (*a*) Usando la serie de Taylor y despreciando términos superiores al primero, demostrar que el flujo neto del campo eléctrico que sale de la superficie gausiana viene dado por $\phi_{\text{neto}} \approx \frac{\partial E_x}{\partial x} \Delta V$, donde ΔV es el volumen limitado por la superficie gausiana. (*b*) Usando la ley de Gauss y el resultado de la parte (*a*) demostrar que $\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, donde ρ es la densidad volúmica de carga dentro del cubo. (Esta ecuación es la forma local de la ley de Gauss en una dimensión.)

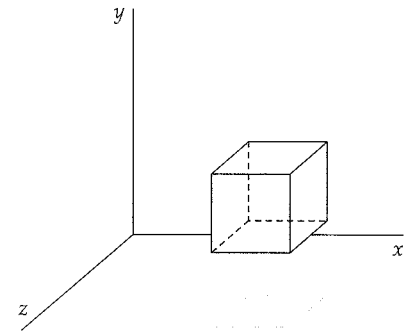


FIGURA 22.47 Problema 86

87 ●●● Un modelo simple pero sorprendentemente preciso de una molécula de hidrógeno es aquel que considera dos cargas puntuales de carga $+e$ colocadas en el interior de una esfera de radio R que contiene una carga $-2e$ uniformemente distribuida en todo el volumen de la misma. Las dos cargas se colocan simétricamente con respecto al centro, tal como indica la figura 22.48. Calcular la distancia a, medida desde el centro, donde la fuerza neta sobre cualquier carga es cero. SSM

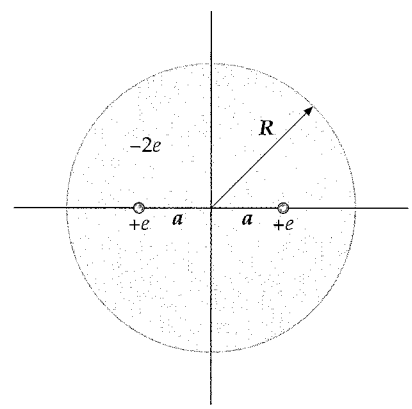


FIGURA 22.48 Problema 87

88 ●●● Un dipolo eléctrico con mometo dipolar $\vec{p}$ está localizado en la perpendicular y a una distancia R de una línea infinita con densidad lineal de carga uniforme λ. Asumir que el momento dipolar está en la misma dirección que el campo generado por la línea de carga. Obtener una expresión para la fuerza eléctrica sobre el dipolo.